愛知医科大学 2010年度 －数学－ 解答速報

I

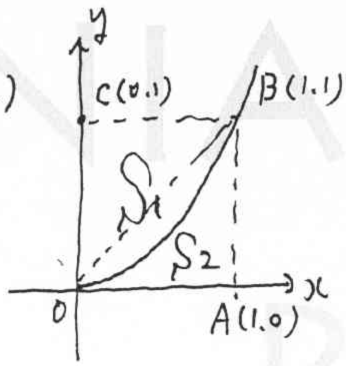
1) $\left(x^2+\frac{2}{x}+(-1)\right)^7$ の $(x^2)^p\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^q\cdot(-1)^r$ の係数は $\frac{7!}{p!q!r!}$

$$\begin{cases} p+q+r=7 \\ 2p-q=3 \end{cases}$$ 辺々足すと、$3p+r=10$

これをみたす0以上の整数の組は $(p,q,r)=(2,1,4),(3,3,1)$

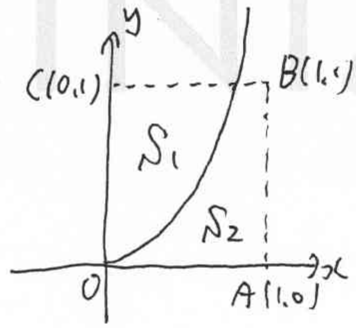
よって、係数は、$2^1\cdot(-1)^4\cdot\frac{7!}{2!4!}+2^3\cdot(-1)\cdot\frac{7!}{3!3!}=210-1120$
$=-910$

2)



左図では明らかに $S_1>S_2$ なので、

右図のとき、



$S_1=\frac{1}{2}$ となる a を求める。

y 軸方向に積分すると、

$$S_1=\int_0^1 x\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{a}}y^{\frac{1}{2}}dy \quad \left(\because\ y=ax^2 \text{より}\ x>0\text{で}\ x=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{y}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}$$

これが $\frac{1}{2}$ なので、$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ \sqrt{a}=\frac{4}{3}$

よって $a=\frac{16}{9}$ //

II. 1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。 $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=|\vec{c}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

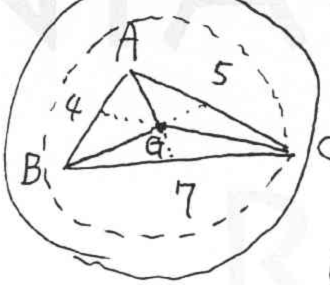
$=25-\vec{b}\cdot\vec{c}$ これが29なので $\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$

$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=16+25+8=49$ ∴ $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=7$ //

2) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\cdot\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}=3\overrightarrow{PG}$ ∴ $|3\overrightarrow{PG}|\leqq a$

よって ∴ $|\overrightarrow{PG}|\leqq\dfrac{a}{3}$

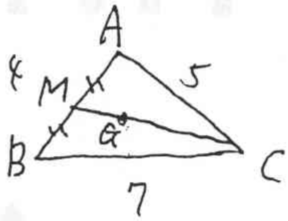


よってPは重心Gを中心とし半径$\dfrac{a}{3}$の円内

中心G, 半径$\dfrac{a}{3}$の円内に△ABCが入ればよい。

Gから三頂点までのきょりのうち Maxは CG なので (注)

もちろん ベクトル的な計算でもいける



$CA^2+CB^2=2(CM^2+AM^2)$ (∵中線定理)

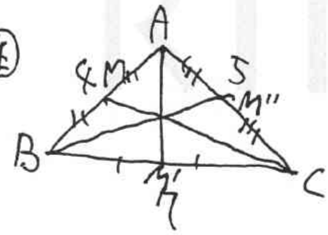
$25+49=2(CM^2+4)$

∴ $CM=\sqrt{33}$

$CG:GM=2:1$ より $CG=\dfrac{2}{3}\sqrt{33}$

よって $\dfrac{a}{3}\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{33}$ ならよいので $a\geqq2\sqrt{33}$ //

(注)



$AM'^2=\dfrac{33}{4}$

$BM''^2=\dfrac{105}{4}$ (中線定理で計算した)

$CM^2=33=\dfrac{132}{4}$

愛知医科大学 2010年度 －数学－ 解答速報

III.

(1) n回目の操作でぬりつぶす正方形の一辺は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

個数は 8^{n-1} なので、

面積は $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}^2\cdot 8^{n-1}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$ //

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^k=\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{8}{9}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{8}{9}}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$ //

(3) $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\geqq 0.99$

$\Leftrightarrow\quad 10^{-2}\geqq\left(\frac{8}{9}\right)^n$

両辺の対数をとると $-2\geqq n\log_{10}\frac{8}{9}$ $\quad\Leftrightarrow\quad -2\geqq n(\underbrace{3\log_{10}2-2\log_{10}3}_{0.3010\times3-0.4771\times2})$

$n\geqq\dfrac{2}{0.0512}=39.06\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数は $n=\underline{\underline{40}}$

講評 ・I、II(1)、III、IV(1)は取りたいところ。

・IIIは正三角形のパターンで、日大、埼玉医大、立体で金沢医大に類題がある。

(シェルピンスキーのギャスケット)

やったことがあればラク。

・IIのラストは、題意をよく取って！

・確率の(2)の証明はできなくても全く問題なし。

全体で、正規ライン7割

補欠合格ライン6割程度か。

〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14 芝田町ビル8F
TEL.06-6372-1131
FAX.06-6372-1132

愛知医科大学 2010年度 －数学－ 解答速報

Ⅳ (1) Aから取りはじめるとすると.(勝者が決まっても最後まで取り切るとしても同じなので)

Bについて $\begin{matrix} R1 \\ W1 \end{matrix}$ となればよく.

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$$ //

(2) (1)と同様、Aから取りはじめるとする.

白玉がn個とする.(全部で $n+2$ 個)

・nが偶数のとき、A、B共に $\frac{n}{2}+1$ 個ずつの玉を取ることになる.

$\left(\begin{matrix} A\ \circ\ \circ\ \circ \cdots\cdots \circ \\ B\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \cdots\cdots \circ \end{matrix}\right.$ 引き分けとなるのは、A, B共にRが1つのとき.

(神様が) R_1, R_2と順に $n+2$ ヶ所の玉のうち2つをRにするとしたら.

$$\underbrace{\frac{\frac{n}{2}+1}{n+2}}_{R_1がA}\times\underbrace{\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}}_{R_2がB}\times\underbrace{2}_{逆もOK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{2}$$

・nが奇数のとき、$\left(\begin{matrix} Aは\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2}個 \\ Bは\ \frac{n}{2}+\frac{1}{2}個 \end{matrix}\right.$ 同様に考えて.

$$\frac{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}{n+2}\times\frac{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\times 2=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+3}{n+2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)>\frac{1}{2}$$

((2)はやや難)