兵庫医科大学 解答速報
2010年度 －数学－

1

(1) $\begin{cases} x+y=s \\ xy=t \end{cases}$ とおくと、x, y は $X^2-sX+t=0$ の2解で、x, y は実数なので。

置き換えたら、変域check! の対称式バージョン。
古典的だが、やったことがないと厳しいかも。

$D=s^2-4t \geqq 0$ …①

又、$x^2-xy+y^2=16$ より $(x+y)^2-3xy=16$

$\therefore\ s^2-3t=16$ ……②

①、② より t を消去すると、$s^2-4\cdot\dfrac{s^2-16}{3} \geqq 0$

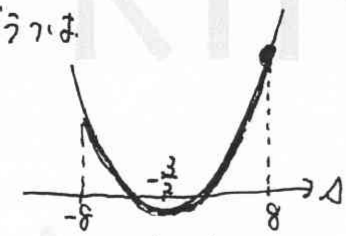
$\Leftrightarrow\ s^2 \leqq 64$ よって $-8 \leqq s \leqq 8$

$x+y+xy=s+t$

$=s+\dfrac{s^2-16}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}-\dfrac{16}{3}$

よって、グラフは



従って Max は $s=8$ のとき $8+\dfrac{64-16}{3}=24$ (答)

(2) 3^{2010} を 80 で割った余りをもとめればよい。

$3^4=80+1$ なので。

3^{2010} を 80 を主役で表す

類題 x^{100} を $(x-1)^2$ で割った余りは。

(解) $x^{100}=\{(x-1)+1\}^{100}$

$=(x-1)^{100}+\cdots+{}_{100}C_{99}(x-1)+1$ (答)

これなら「微分」を利用する別解もある。

$3^{2010}=3^2\cdot(3^4)^{502}$

$=9\cdot(80+1)^{502}$

$=9(\underbrace{80^{502}+{}_{502}C_1 80+{}_{502}C_2 80^2+\cdots+{}_{502}C_{501} 80}_{\text{80で割り切れる。}}+1)$

$=80\times$整数$+9$

よって余りは 9.

((3)は次ページ)

(4) C_1 と C_2 の交点を通る直線の式は、

$x^2+y^2-9+k\{(x-a)^2+(y-b)^2-25\}=0$ で $k=-1$ とすればよく、

これは $2ax+2by+16-a^2-b^2=0$ となる。

これが $2x+y+1=0$ なので。

$\dfrac{2a}{2}=\dfrac{2b}{1}=\dfrac{16-a^2-b^2}{1}$ ⇐ $2a=2$、$2b=1$ 等としないように。

これを解くと、$(a, b)=\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5}\right), (-4, -2)$

$a>0$ より $(a, b)=\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

よって $a+b=\dfrac{24}{5}$

兵庫医科大学 解答速報
2010年度 －数学－

(3) 0〜9のうち、異なる4つの整数を選び、それらの和が9の倍数になるものは、

9-8-7-3	9-4-3-2	7-6-3-2
9-8-6-4	8-7-3-0	7-5-4-2
9-8-1-0	8-7-2-1	6-5-4-3
9-7-6-5	8-6-4-0	6-2-1-0
9-7-2-0	8-6-3-1	5-3-1-0
9-6-3-0	8-5-4-1	4-3-2-0
9-6-2-1	8-5-3-2	
9-5-4-0	7-6-5-0	
9-5-3-1	7-6-4-1	

並びかえ $4!=24$

このうち、$\begin{cases} 0\text{なし } 14\text{通り} \\ 0\text{あり } 10\text{通り} \end{cases}$

並びかえ $3\cdot 3!=18$

$14\times 24+10\times 18=$ 516通り

これは制限時間内には無理でしょう。
配点15点だが、捨てるのも手。

(5) $\tan(x+y)=\frac{3}{4}$ より、 $1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2(x+y)}$ $\therefore \cos^2(x+y)=\frac{16}{25}$

よって $\cos(x+y)=\pm\frac{4}{5}$

ここで、$-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$ より $-\pi<x+y<\pi$ で $\tan(x+y)>0$ より、

$-\pi<x+y<-\frac{\pi}{2}$、$0<x+y<\frac{\pi}{2}$ だが、前者なら $x<0$、$y<0$ となり

$\tan x+\tan y>0$ とならないので不適。 $\therefore 0<x+y<\frac{\pi}{2}$

よって $\cos(x+y)=\frac{4}{5}$

出題者は $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ より

$\frac{3}{4}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\tan x\tan y}$ $\therefore \tan x\tan y=-1$

よって、$\tan x$、$\tan y$ は $t^2-\frac{3}{2}t-1=0$ の2解より、$t=-\frac{1}{2}, 2$

$-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$ より $\tan x=-\frac{1}{2}$、$\tan y=2$

これらから $\sin x$、$\cos x$、$\sin y$、$\cos y$ を求め、

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ に代入とさせたかったのだろうか…。

医学部専門予備校 リニア
〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14 芝田町ビル8F
TEL.06-6372-1131
FAX.06-6372-1132

兵庫医科大学 2010年度 －数学－ 解答速報

(6) $f(x) = -2x + \frac{25}{2} + \int_0^1 (xt - e^t)^2 dt$

$= -2x + \frac{25}{2} + x^2 \underbrace{\int_0^1 t^2 dt}_{} - 2x \underbrace{\int_0^1 te^t dt}_{} + \underbrace{\int_0^1 e^{2t} dt}_{}$

$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 te^t dt = \int_0^1 t(e^t)' dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = 1$

$\int_0^1 e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$

もちろん、平面の式を"教科書風"に $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{QP} + t\overrightarrow{QR}$ とおいてもできる。

普通にがんばる

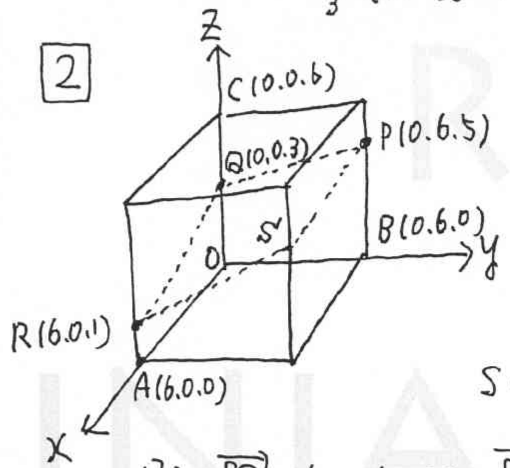
$= -2x + \frac{25}{2} + \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{e^2-1}{2}$

$= \frac{x^2}{3} - 4x + \frac{e^2}{2} + 12$

$= \frac{1}{3}(x-6)^2 + \frac{e^2}{2}$ よって $x=6$ で最小値 $\frac{e^2}{2}$

$\therefore a=6,\ m=\frac{e^2}{2}$　　$ma = \underline{3e^2}$

$\boxed{2}$



(1) $\overrightarrow{PQ} = (0, -6, -2)$, $\overrightarrow{PR} = (6, -6, -4)$ に共に垂直なベクトルの1つは、$(1, -1, 3)$ なので、

平面PQRの式は、$x - y + 3(z-3) = 0$

$\therefore\ x - y + 3z = 9$

Sは、$x=6$, $y=6$ とすると $z=3$ よって $S\ \underline{(6, 6, 3)}$

(2) $\overrightarrow{PQ} = (0, -6, -2)$, $\overrightarrow{PS} = (6, 0, -2)$ より $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{40}\sqrt{40}} = \underline{\frac{1}{10}}$

(3) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = (6, 0, -2)$ より、四角形PQRSは平行四辺形。(実は、ひし形)

よって $S = |PQ||PS|\sin\theta = \sqrt{40}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 12\sqrt{11}$

(4) 共に垂直なベクトルの1つは $(1, -1, 3)$ なので、求める単位ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)$

(5) PRとQSの交点は、対角線の中点なので、$(3, 3, 3)$。

よって直線の式は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で $z=0$ とすると $k=-1$ なので、$(2, 4, 0)$

兵庫医科大学 解答速報
2010年度 −数学−

$\boxed{3}$

(1) $d_8=0$ は $n_A=n_B=4$ なので. ${}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\underline{\frac{35}{128}}$

和が1を確認しよう!

(2) $d_8=8$ のとき $(n_A, n_B)=(8, 0), (0, 8)$ $\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^8\times 2=\frac{1}{128}$

$d_8=6$ 〃 〃 $(7, 1), (1, 7)$ $\therefore\ {}_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{8}{128}$

$d_8=4$ 〃 〃 $(6, 2), (2, 6)$ $\therefore\ {}_8C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{28}{128}$

$d_8=2$ 〃 〃 $(5, 3), (3, 5)$ $\therefore\ {}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{56}{128}$

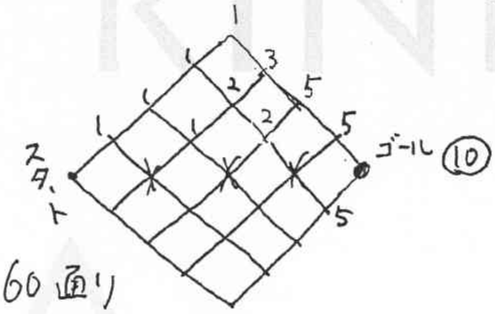
よって期待値は. $\frac{56}{128}\times 2+\frac{28}{128}\times 4+\frac{8}{128}\times 6+\frac{1}{128}\times 8=\frac{280}{128}=\underline{\frac{35}{16}}$

(3),(4) $d_8=0$ は ${}_8C_4=70$ 通り.

このうち.途中で $d_s=0$ とならないものは.

右図より 10 通り.

よって $d_s=0$ となるものは $70-10=60$ 通り



(3)の答は $\frac{60}{2^8}=\underline{\frac{15}{64}}$

(4) 〃 $\frac{10}{2^8}=\underline{\frac{5}{128}}$

2010年度は、小問の数が少な目で. 大問も比較的 easy である.

$\boxed{1}$ (3)(い)は.合わなくてもヨシとして、その他の小問集合は大きく差がつきそうである.

大問2題はほぼ perfect に取り. $\boxed{1}$ を半分位押さえて 8割取れば.正規合格ライン. 7割で. 補欠合格ライン.

確率の題材が"医学的"なのは兵庫医大ではよくあること。おそらく来年も…。