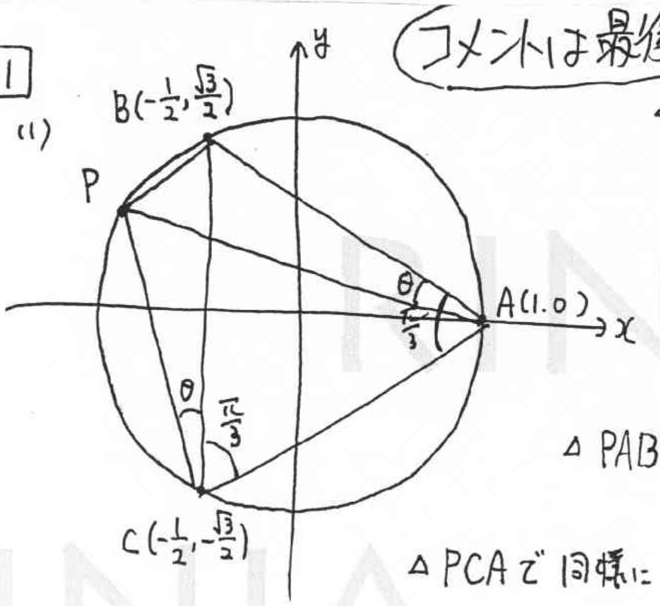
近畿大学（前期）解答速報
2010年度 －数学－

（コメントは最後）

1

(1)



△ABCは正三角形となるので、$\angle BAC = \angle BCA = \frac{\pi}{3}$

又、$\angle PAB = \angle PCB = \theta$ （∵ $\overset{\frown}{PB}$ に対する円周角）

△PCAで正弦定理より $\dfrac{PA}{\sin\angle PCA} = 2$ （∵R=1）

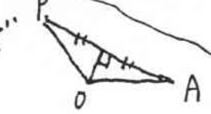
$\therefore PA = \underset{(ア)}{\underline{\underline{2}}}\sin\left(\theta + \underset{(イ)}{\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}}\right)$

△PABで同様にして $\dfrac{PB}{\sin\angle PAB} = 2$ $\therefore PB = \underset{(ウ)}{\underline{\underline{2}}}\sin\theta$

△PCAで同様にして $\dfrac{PC}{\sin\angle PAC} = 2$ $\therefore PC = \underset{(エ)}{\underline{\underline{2}}}\sin\left(-\theta + \underset{(オ)}{\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}}\right)$

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}$ のときも、上の答に含まれる。

(1)で



としてやると cosを用いた形で出てくる。

cosをsinに直すには

$\cos\text{□} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{□}\right)$

とすればよい。

(2)

$$PA = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin\theta \cdot \frac{1}{2} + \cos\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$

$$PB = 2\sin\theta$$

$$PC = 2\sin\left(-\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$$

$$\therefore PA + PB + PC = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 2\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$= 2 \cdot 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\because 合成)$$

$$= \underset{(カ)}{\underline{\underline{4}}}\sin\left(\theta + \underset{(キ)}{\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$ なので、

$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ つまり $\theta = \underset{(ク)}{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ のとき最大値 $\underset{(ケ)}{\underline{4}}$

(3)

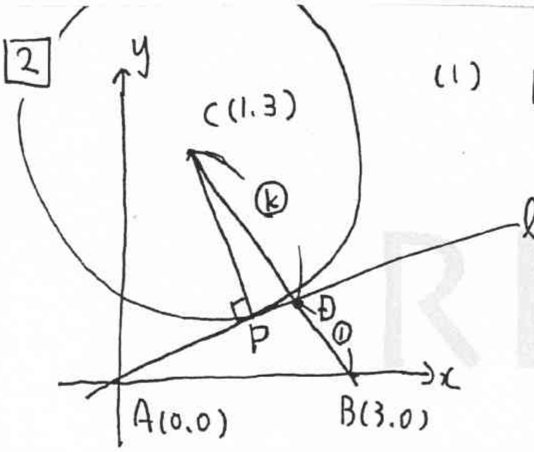
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2 + (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)^2$$

$$= 6(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \underset{(コ)}{\underline{\underline{6}}}$$

近畿大学（前期） 2010年度 －数学－ 解答速報

2



(1) Dは B(3,0), C(1,3) を 1:k に内分する点なので、

$$D:\left(\frac{1+3k}{1+k},\ \frac{3}{1+k}\right)$$ (答)

ODの傾きは $\dfrac{\frac{3}{1+k}}{\frac{1+3k}{1+k}}=\dfrac{3}{1+3k}$ よって $l: y=\dfrac{3}{1+3k}x$ (答)

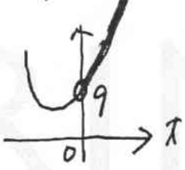
r は $l: 3x-(1+3k)y=0$ と C(1,3) の距離なので.

$$r=\frac{|3-3(1+3k)|}{\sqrt{9+(1+3k)^2}}=\frac{9k}{\sqrt{9k^2+6k+10}}$$ (答)

(2) $r=\dfrac{9}{\sqrt{9+\frac{6}{k}+\frac{10}{k^2}}}$

$=\dfrac{9}{\sqrt{10t^2+6t+9}}$ ($\frac{1}{k}=t$ とおいた. $(t>0)$)

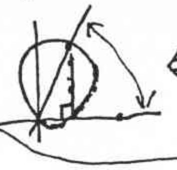
√内のグラフは



となるので √内>9

∴ 分母>3 よって $0<r<3$

(別) 図より l の傾きは 0<傾き<3

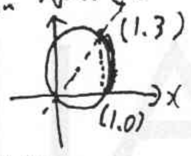


⇐ Maxの図

......

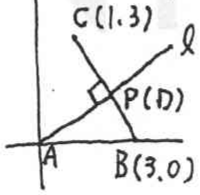
(3) CP⊥l より P は AC を直径の両端とする円上を動き、さらに l が存在する部分との交点なので.

中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 半径 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円の $x>1$ の部分.



$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\quad (x>1)$$

(4)

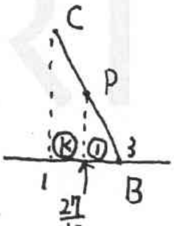


CBの傾き $=\dfrac{0-3}{3-1}=-\dfrac{3}{2}$, よって l の傾き $=\dfrac{2}{3}$ (∵ CP⊥l)

よって. CB: $y=-\frac{3}{2}(x-3)$ と l: $y=\frac{2}{3}x$ を連立させると.

$(x, y)=\left(\frac{27}{13}, \frac{18}{13}\right)$ Pの座標.

このとき



$1:k=3-\frac{27}{13}:\frac{27}{13}-1$

$=12:14$

$=1:\frac{7}{6}$ ∴ $k=\frac{7}{6}$

3

(1) $\dfrac{1}{x_n}=n+\dfrac{x_n}{2}$ より $x_n^2+2nx_n-2=0$

$\therefore\ x_n=-n\pm\sqrt{n^2+2}$

$0<x_n<1$ より $\underset{\sim\sim\sim}{x_n=-n+\sqrt{n^2+2}}$

$n=1$ とすると $\underset{\sim\sim\sim}{x_1=-1+\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{1}{n}-x_n=\dfrac{1}{n}-(-n+\sqrt{n^2+2})$

$=n+\dfrac{1}{n}-\sqrt{n^2+2}$

$=\sqrt{(n+\frac{1}{n})^2}-\sqrt{n^2+2}$

$=\sqrt{n^2+2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{n^2+2}>0$ よって $x_n<\dfrac{1}{n}$

$n+\dfrac{1}{n}>\sqrt{n^2+2}$ を示すのに両辺>0より2乗して…、とやってもよい。

(3) $S_n=x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ （$\because$ (2)）

又、(※)より $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\leqq 1+\log_2 n$ なので

$S_n<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqq 1+\log_2 n$ q.e.d.

(4) (i) $(1+\frac{1}{n})^n=1+\underbrace{{}_nC_1\cdot\frac{1}{n}}_{=1}+\underbrace{{}_nC_2\cdot(\frac{1}{n})^2+\cdots\cdots}_{\text{正}(n=1\text{のときは}0)}\geqq 2$

$(1+\frac{1}{n})^n\geqq 2$ に対して、両辺の対数（底は2）をとると、

$\log_2(1+\frac{1}{n})^n\geqq\log_2 2$

$\Leftrightarrow\ n\log_2(1+\frac{1}{n})\geqq 1$ $\therefore\ \log_2(1+\frac{1}{n})\geqq\dfrac{1}{n}$

医学部専門予備校 リニア
〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14 芝田町ビル8F
TEL.06-6372-1131
FAX.06-6372-1132

(ii) あるk ($k=1,2,\cdots\cdots$) に対して、(※) が成り立つと仮定すると、

$n=k+1$ のときに、

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \leqq 1+\log_2 k+\frac{1}{k+1} \quad (\because 仮定)$$

ここで、$1+\log_2(k+1)-\left(1+\log_2 k+\frac{1}{k+1}\right)=\log_2\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}$

$$=\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}$$

$$\geqq \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \quad (\because (4)\ (i))$$

$$= \frac{1}{k(k+1)} > 0$$

よって $n=k+1$ のとき $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1} < 1+\log_2(k+1)$ が成立。

$n=1$ のとき、左辺＝右辺＝1 で成立している。

よって数学的帰納法により(※)が成立。

$\boxed{1}$ は、方針によって少しメンドウになりそう。（(2)を和積で処理しようとしたり、(3)をもとの形のまま2乗してみたり…）

$\boxed{2}$ は 3年連続出題 軌跡が円となる問題（直交する2直線の交点）

(2)は数III的にそのまま微分したくなるかもしれないが、少しの工夫で楽に処理できる。
図形的考察もまじえながら、計算量を少なくしていこう。

$\boxed{3}$ は 実は「見かけ倒し」なのだが、迫力に負けずに落ち着いて問題についていけば、very easy.

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ は 大きく落としてしまう可能性はあるだろうが、なんとか切り抜けて、

9割以上（できれば満点）を確保できる内容である！