愛知医科大学 2011年度 －数学－ 解答速報

I　$x^2-xy-6y^2+x+ay-2=0$ が2本の直線を表すためには、

　(x, yの1次式)(x, yの1次式) = 0　となればよい。

(解1)　左辺 $=(x-3y)(x+2y)+x+ay-2$

$=(x-3y+s)(x+2y+t)$ とおくと、

xの係数を比較して　$s+t=1$
y　〃　$2s-3t=a$
定数項　〃　$st=-2$

これらを解くと

$(s, t, a)=(2, -1, 7), (-1, 2, -8)$

よって　7, −8

(解2)　xの方程式とみて解いたときに　$x=$ (yの1次式) となればよい。

つまり　$D_x=0$ の $D_y=0$　(Dは判別式)

$x^2+(1-y)x-(6y^2-ay+2)=0$

$D_x=(1-y)^2+4(6y^2-ay+2)$

$=25y^2-2(2a+1)y+9=0$

$D/4=(2a+1)^2-25\cdot 9$

$=4(a-7)(a+8)=0$

$\therefore a=7, -8$

II.　Ⓐ 6の倍数…5枚

Ⓑ 2の倍数 but 6の倍数…10枚

Ⓒ 3　〃　〃　…5枚

2枚中、少なくとも1枚がⒶ　又はⒷ, Ⓒを1枚ずつならよい。

$$\left(1-\frac{{}_{25}C_2}{{}_{30}C_2}\right)+\frac{{}_{10}C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{30}C_2}=\frac{37}{87}$$

Ⓐが少なくとも1枚　　Ⓑ, Ⓒ 1枚ずつ

III　$f(x)$は多項式なので、$f'(x)$, $f''(x)$も共に多項式。

$f(x)$をn次式でおくと、$n=1$ のときは明らかに不適なので $n\geqq 2$として、

左辺 = n次式、右辺 = $(n-1)+(n-2)=2n-3$ 次式

$\therefore n=2n-3$　よって $n=3$

愛知医科大学 2011年度 －数学－ 解答速報

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおけて. $(a\neq 0)$

右辺 $=f'(x)\cdot f''(x)$

$=(3ax^2+2bx+c)(6ax+2b)$

$=18a^3x+18abx^2+(4b^2+6ac)x+2bx$

両辺の係数を比較すると.

$$\begin{cases}18a^2=a\\ 18ab=b\\ 4b^2+6ac=c\\ 2bc=d\end{cases}\quad \text{これらより}\quad \begin{cases}a=\dfrac{1}{18}\\ c=6b^2\\ d=12b^3\end{cases}$$

よって $f(x)=\dfrac{1}{18}x^3+bx^2+6b^2x+12b^3$

$=\dfrac{1}{18}(x+6b)^3$　　よって $f(x)=0$ は三重解 $x=-6b$ を持つ.

Ⅳ

(1) 解1)　$x_{n+1}=2rx_n+ry_n$ ……①

$y_{n+1}=\left(r-\frac{1}{2}\right)x_n+\left(\frac{1}{2}r+1\right)y_n$ …②

①$\times\frac{1}{2}$－②: $\frac{1}{2}x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-y_n$

(r消去)

よって $\frac{1}{2}x_n-y_n=\left(\frac{1}{2}\cdot 3-1\right)\cdot 1^{n-1}$

$=\frac{1}{2}$　　よって $y_n=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{2}$ が

常に成立するので、P_nは常に $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 上にある.

解2)　$(x_1,y_1)=(3,1)$ より　$x_2=2r\cdot 3+r\cdot 1=7r$

$y_2=3\left(r-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{2}r+1\right)=\frac{7}{2}r-\frac{1}{2}$

よって (x_1,y_1) と (x_2,y_2) を通る直線の式は.

$r\neq\frac{3}{7}$ のとき,

$y=\dfrac{\frac{7}{2}r-\frac{1}{2}-1}{7r-3}(x-3)+1 \iff y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　($r=\frac{3}{7}$ のときもこれでよい)

愛知医科大学 2011年度 －数学－ 解答速報

次に、$P_n(x_n, y_n)$ が常に $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 上にあることを数学的帰納法で示す。

$n=k$ のとき、$y_k=\frac{1}{2}x_k-\frac{1}{2}$ と仮定すると、

$n=k+1$ のとき

$$x_{k+1}=2rx_k+ry_k$$
$$=2rx_k+r\left(\frac{1}{2}x_k-\frac{1}{2}\right)\quad(\because 仮定)$$
$$=\frac{5}{2}rx_k-\frac{1}{2}r\quad\cdots\cdots③$$

$$y_{k+1}=\left(r-\frac{1}{2}\right)x_k+\left(\frac{1}{2}r+1\right)y_k$$
$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)x_k+\left(\frac{1}{2}r+1\right)\left(\frac{1}{2}x_k-\frac{1}{2}\right)\quad(\because 仮定)$$
$$=\frac{5}{4}rx_k-\frac{1}{4}r-\frac{1}{2}\quad\cdots④$$

③、④は $y_{k+1}=\frac{1}{2}x_{k+1}-\frac{1}{2}$ を満たすので、$n=k+1$ のときも成立。

$n=1$ のとき、$(x_1, y_1)=(3, 1)$ はこの直線上にあるので、

$P_n(x_n, y_n)$ は常に $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 上にあることが示された。

(2)

$$x_{n+1}=2rx_n+ry_n$$
$$=2rx_n+r\left(\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{2}rx_n-\frac{r}{2}\quad\cdots⑤$$

$r=\frac{2}{5}$ のとき、この数列は公差 $-\frac{1}{5}$ の等差数列となり、x_n は発散する。

よって $r\neq\frac{2}{5}$

このとき、⑤は $x_{n+1}-\frac{r}{5r-2}=\left(3-\frac{r}{5r-2}\right)\left(\frac{5}{2}r\right)^{n-1}\left(=\frac{14r-6}{5r-2}\cdot\left(\frac{5}{2}r\right)^{n-1}\right)$

これが収束するには、・$3-\frac{r}{5r-2}=0 \iff r=\frac{3}{7}$

・又は、$-1<\frac{5}{2}r\leqq 1 \iff -\frac{2}{5}<r\leqq\frac{2}{5}$　$r\neq\frac{2}{5}$ より $-\frac{2}{5}<r\leqq\frac{2}{5}$

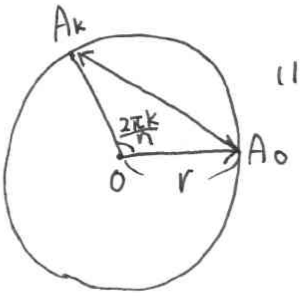
以上より $-\frac{2}{5}<r<\frac{2}{5}$ 又は $r=\frac{3}{7}$ ……☆

$x_n=\frac{14r-6}{5r-2}\cdot\left(\frac{5}{2}r\right)^{n-1}+\frac{r}{5r-2}$ で、☆の条件をみたすとき、$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{r}{5r-2}$ となり、

このとき $y_n=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{2}$ より、$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{5r-2}-\frac{1}{2}=\frac{-2r+1}{5r-2}$

よって、r の条件は、$-\frac{2}{5}<r<\frac{2}{5}, r=\frac{3}{7}$
$(x_n, y_n)\longrightarrow\left(\frac{r}{5r-2}, \frac{-2r+1}{5r-2}\right)$

[V]



(1) $\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0A_k} = \overrightarrow{OA_0}\cdot(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_0})$

$= \overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{OA_k} - |\overrightarrow{OA_0}|^2$

$= r\cdot r\cdot\cos\frac{2\pi k}{n} - r^2$

$= r^2\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)$ //

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0A_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} r^2\left(\cos\frac{2\pi k}{n}-1\right)$

$\displaystyle = r^2\int_0^1 \cos 2\pi x - 1\ dx$

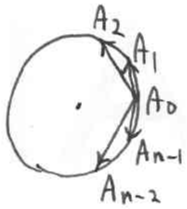
$\displaystyle = r^2\left[\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}-x\right]_0^1 = -r^2$ //

(3) $\overrightarrow{A_0B_n} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_0A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_0A_{n-2}}+\overrightarrow{A_0A_{n-1}})$ について、(　)内を

両端からペアにしていくと、$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_0A_{n-1}}$, $\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_0A_{n-2}}$, … は対称性より

全て $\overrightarrow{OA_0}$ と平行になる。ただし、反対向き

よって $\overrightarrow{A_0B_n} = \alpha\overrightarrow{OA_0}$. $(\alpha<0)$



又、(2)により

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0B_n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0A_k} = -r^2$

$|\overrightarrow{OA_0}| = r$, $\overrightarrow{OA_0}$ と $\overrightarrow{A_0B_n}$ のなす角は π、つまりなす角の余弦は $\cos\pi = -1$

なので　$\displaystyle r\cdot\lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{A_0B_n}|\cdot(-1) = -r^2$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{A_0B_n}| = r$

従って　B_n は点 O に近付く。