受験番号

平成23年度

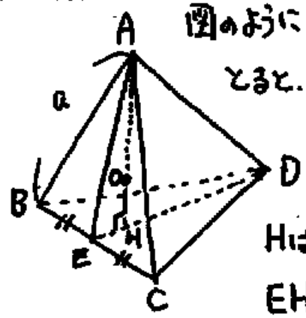
数学
答案用紙
(1)

医学部専門予備校

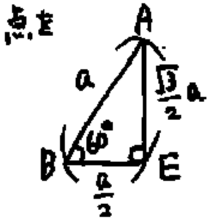
リニア

1

(1) 計算欄



図のように点をとると。

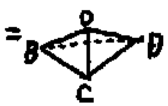


Hは△BCDの重心なので、

$$EH=\frac{1}{3}DE=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$AH=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

ここで、AO : OH = 3 : 1 (∵ 四面体ABCD : 四面体OBCD

=  × 4 : )

よって 外接球の半径 $=\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$

正四面体の外接球の半径 : 内接球の半径 = 3 : 1 は常識にしておこう。証明は色々あるが、上の体積比に注目する考え方がラク。

解答欄	1-(1) $\frac{\sqrt{6}}{4}a$

(2) 計算欄

$$\underbrace{\square\square\square}_{p}\underbrace{\square\square\square}_{q}=1000p+q$$

条件より 1000p+q, p+qが共にaの倍数

よって $(1000p+q)-(p+q)=999p$

がaの倍数

$$999p=3^3\cdot37\cdot p$$

pもaも素数で、pが3桁、

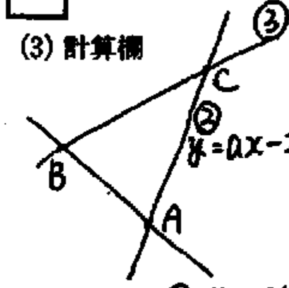
aが2桁なので、aは37しかありえない。

毎年のように出る、パズル的な問題。慣れていないと戸惑いそう。解答は「必要条件」だけで問題なし。

解答欄	1-(2) 37

1

(3) 計算欄



③ $y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}+3$

② $y=ax-2a+3$

① $y=-x-1$

②,③は共に定点$(2,3)$を通る。
これをCとすると、Cと$y=-x-1$の距離は $\frac{|2+3+1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

よって図のA,Bに対して、$\frac{AB\cdot 3\sqrt{2}}{2}=12$ ∴ $AB=4\sqrt{2}$

①,②を連立すると、$x=\frac{2a-4}{a+1}$
①,③ 〃 $x=\frac{2-4a}{a+1}$

よって $AB=\left(\frac{2a-4}{a+1}-\frac{2-4a}{a+1}\right)\cdot\sqrt{2}$

$=\frac{6\sqrt{2}(a-1)}{a+1}$

これが $4\sqrt{2}$ なので、$\frac{6\sqrt{2}(a-1)}{a+1}=4\sqrt{2}$

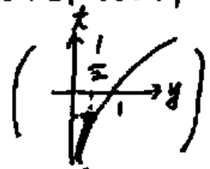
これを解くと、$a=5$

交点の座標を3つ求めて、座標を使った面積公式 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ を用いてもよいが、定点、定直線を利用しよう。

解答欄	1-(3)
	5

(4) 計算欄

$\log_x y=t$とおくと、$x>1$, $0<y\leqq\frac{1}{2}$ より、
$t<0$



また、$\log_y x=\frac{1}{\log_x y}=\frac{1}{t}$ より、$2t-\frac{3}{t}-5=0$

∴ $2t^2-5t-3=0 \Leftrightarrow (t-3)(2t+1)=0$

$t<0$ より $t=-\frac{1}{2}$ 2つのうち、適する1つにしぼれる!!

よって $\log_x y=-\frac{1}{2}$ ∴ $y=x^{-\frac{1}{2}}$

∴ $3y-2x^{-1}=3x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1}$

$=3s-2s^2$ ($x^{-\frac{1}{2}}=s$とおいた。$x>1$より$0<s<1$)

$=-2\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

このあたりは、どうやってもよい。(数Ⅲ的にビブンなど)

よって $s=\frac{3}{4}$ つまり $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ つまり $x=\underset{\uparrow a}{\frac{16}{9}}$ のときに、
最大値 $\frac{9}{8}\leftarrow m$

∴ $ma=\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{9}=2$

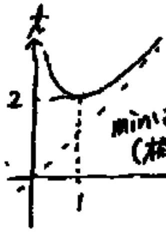
解答欄	1-(4)
	2

これより右の欄には何も記入してはいけない

1

(5) 計算欄

$x>0$ において、$t=x+\frac{1}{x}$ のグラフは、



min は $x+\frac{1}{x}\geq 2$ より 2.
(相加相乗、等号は $x=1$)

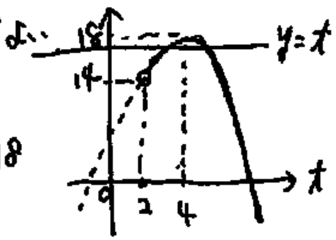
となるので、$t>2$ のとき、t の値1つに対して x が2つ対応する。 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=t^2-2$ なので、

与えられた方程式を t を用いて書くと、

$$t^2-8t+k-2=0$$

$$\Leftrightarrow\ k=-t^2+8t+2$$

$y=k$ と $y=-t^2+8t+2$ が $t>2$ を満たす異なる2解を持てばよい。



$$y=-t^2+8t+2$$
$$=-(t-4)^2+18$$

よって $\underset{a}{14}<k<\underset{b}{18}$

$\therefore\ b-a=18-14=4$

相反形の処理。
「解の個数」で置き換えが必要なトキは、個数の対応関係をしっかり押さえて解く。

解答欄	1-(5) 4

(6) 計算欄

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-\frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1}=5a_n-\frac{3}{2}b_n \end{cases},\quad a_1=5,\quad b_1=8$$

これが $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ と変形できるとする。

左辺 $=2a_n-\frac{1}{2}b_n+p(5a_n-\frac{3}{2}b_n)=(2+5p)a_n-(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}p)b_n$

右辺 $=qa_n+pqb_n$

係数を比較すると $\begin{cases} 2+5p=q \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}p=pq \end{cases}$

これらを解くと、$(p,q)=(-\frac{1}{5},1),\ (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

よって $\begin{cases} a_{n+1}-\frac{1}{5}b_{n+1}=a_n-\frac{1}{5}b_n \\ a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_n-\frac{1}{2}b_n) \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} a_n-\frac{1}{5}b_n=5-\frac{8}{5}=\frac{17}{5} & \cdots\cdots ① \\ a_n-\frac{1}{2}b_n=(5-\frac{8}{2})\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}=(-\frac{1}{2})^{n-1} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①, ②を a_n, b_n について解くと、

$$a_n=\frac{1}{3}\left\{17-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{17}{3}=\alpha$$

$$b_n=\frac{10}{3}\left\{\frac{17}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{34}{3}=\beta$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{17}{3}+\frac{34}{3}=17$$

連立の漸化式の一般的解法には、他に、
一文字消去 → 三項間漸化式 として解いてもよい。

解答欄	1-(6) 17

平成23年度
数 学
答案用紙
(2)

医学部専門予備校
リニア

2

(1)，(2) 計算欄［(2) の解答欄は次ページ］

(1)

$$ {}_3C_2 \cdot {}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3^6} $$

$$ = \frac{20}{243} $$

3つの状態のうちのどの2つか。

どの3人か。

2つのうちの、特定の方が

題意をきっちり取って、ケアレスミスをしないように落ちついてやれば難しくはない。

「残り2つの状態」はひとまとめにして

(2)

$$ \begin{cases} n-3\text{人が同じ} \cdots & {}_3C_1 \cdot {}_nC_{n-3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} \cdot \frac{2^3}{3^n} \\ n-2 \quad \text{〃} \cdots & {}_3C_1 \cdot {}_nC_{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2^2}{3^n} \\ n-1 \quad \text{〃} \cdots & {}_3C_1 \cdot {}_nC_{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot n \cdot \frac{2}{3^n} \\ n \quad \text{〃} \cdots & {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{3^n} \end{cases} $$

「少なくとも」→「余事象の利用」という短絡的思考は捨てましょう。計算しやすいのはどっち？

これらを全て加えると、

$$ \frac{1}{3^n}\left\{4(n^3-3n^2+2n)+6(n^2-n)+6n+3\right\} = \frac{4n^3-6n^2+8n+3}{3^n} $$

解答欄	2-(1) $\frac{20}{243}$

これより右の欄には何も記入してはいけない

平成23年度

数　学

答案用紙

(3)

医学部専門予備校

リニア

2

(2), (3) 計算欄

(3)

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{4(n+1)^3-6(n+1)^2+8(n+1)+3}{3^{n+1}}}{\dfrac{4n^3-6n^2+8n+3}{3^n}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4(n+1)^3-6(n+1)^2+8(n+1)+3}{4n^3-6n^2+8n+3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\frac{6}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{8}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{n^3}}{4-\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{3}{n^3}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

展開するヒマがあったら、とっとと最高次(n^3)で分母分子を割ろう

解答欄	2-(2) $\dfrac{4n^3-6n^2+8n+3}{3^n}$

解答欄	2-(3) $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{3}$

(1), (2) 計算欄

(1)
$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t - 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t + 2\sin t \end{cases}$$

位置 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 速度

よって
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = -2\sin 2t + 2\sin t \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = 2\cos 2t + 2\cos t \end{cases}$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{(\cos 2t - 2\cos t)^2 + (\sin 2t + 2\sin t)^2}$$
$$= \sqrt{5 - 4(\cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t)}$$
$$= \sqrt{5 - 4\cos 3t}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2\sin 2t + 2\sin t)^2 + (2\cos 2t + 2\cos t)^2}$$
$$= 2\sqrt{2 + 2(\cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t)}$$
$$= 2\sqrt{2(1 + \cos 3t)} \quad \left(= 4\left|\cos \tfrac{3}{2}t\right|\right)$$

$\sqrt{1+\cos x}$ や $\sqrt{1-\cos x}$ のルートはハズセルよ!!

(2)
$$\vec{P}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\cos t \\ \sin 2t + 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2t + 2\sin t \\ 2\cos 2t + 2\cos t \end{pmatrix}$$
$$= 6(\sin 2t\cos t + \cos 2t\sin t)$$
$$= 6\sin 3t$$

$0 \leqq t \leqq \pi$ より $0 \leqq 3t \leqq 3\pi$ なので.

$\vec{P}\cdot\vec{v} = 0$ となるのは $3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$\therefore t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$

$t = 0, \frac{2\pi}{3}$ のときは $|\vec{P}|, |\vec{v}|$ ともに 0 ではないので、$t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}\pi$ ($t = \frac{\pi}{3}$ のとき, $|\vec{v}| = 0$ となる)

$t = \frac{2}{3}\pi$ のとき、$|\vec{v}| = 0$ となり、このときは"垂直"とはいえない。そういうことを確認しておく

これより右の欄には何も記入してはいけない

解答欄	3-(1)
	$|\vec{P}| = \sqrt{5 - 4\cos 3t}$ $|\vec{v}| = 2\sqrt{2(1+\cos 3t)}$ $\left(= 4\left|\cos\frac{3}{2}t\right|\right)$

解答欄	3-(2)
	$t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2\pi}{3}$

平成23年度

数　学

答案用紙

（4）

医学部専門予備校

リニア

3

(3) 計算欄

$$L=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}|\vec{v}|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}2\sqrt{2(1+\cos 3t)}\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{3}{2}t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left|\cos\frac{3}{2}t\right|dt$$

$$=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{3}{2}t\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}-\cos\frac{3}{2}t\,dt\right\}$$

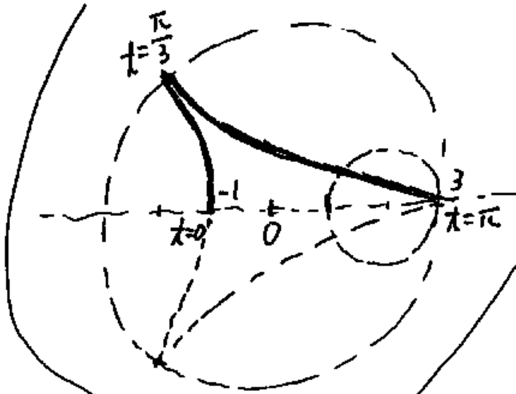
$$=4\cdot\frac{2}{3}\left\{\left[\sin\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\sin\frac{3}{2}t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\right\}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{16}{3}$$

$\sqrt{1+\cos x}$ のルートはハズせる。

参 これは内サイクロイドの一種



解答欄	3-(3) $\frac{16}{3}$

大きく差のつきそうなセットである。

$\boxed{3}$ は物理選択者し浪人生は大丈夫であったかもしれないが、そうでなければかなり面くらうかも。前年度の獨協医大や東海大などでも速度、長さの問題は出ており、今後も要注意。(範囲的に、兵医ではキワドいが)。

全体で7割程度とりたい。

数学担当：田地