近畿大学（前期）2011年度 －数学－ 解答速報

$\boxed{1}$ O_1：中心 $(0,0)$，半径 $2r$　　O_2：中心 $(a,0)$，半径 r

(1) i) |半径の差| < 中心間距離 < 半径の和 となればよいので. $2r-r < a-0 < 2r+r$

$\therefore \boxed{r < a < 3r}$ …rの範囲

O_1： $x^2+y^2=4r^2$

O_2： $x^2-2ax+a^2+y^2=r^2$

辺々引くと. $2ax-a^2=3r^2$

$\therefore \boxed{x=\dfrac{a^2+3r^2}{2a}}$ …Pのx座標.

一般に. 円と円の交点を通る直線は. $f(x,y)+kg(x,y)=0$ において. x^2, y^2 を消すような k (almost -1) を使えば求められる

ii) Pは $x^2+y^2=4r^2$ を満たすので. 第1象限において. yがMax → xがmin.

$$x=\frac{a^2+3r^2}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3r^2}{a}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3r^2}=\sqrt{3}\,r$$

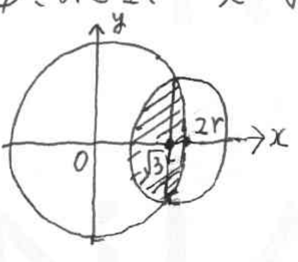
($\because$ a, $\dfrac{3r^2}{a}>0$ より. 相加相乗を用いた. 等号は. $a=\dfrac{3r^2}{a}$ つまり $a=\sqrt{3}r$ のとき)

コメントは
2枚目の
下にあります

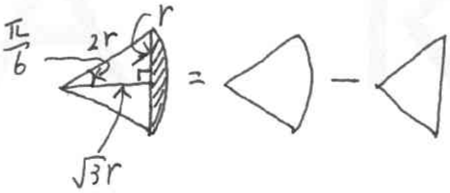
よって. yがMaxとなるのは. $\boxed{a=\sqrt{3}r}$ のときで.

このとき. $x=\sqrt{3}r$ なので $\boxed{y=r}$

← O_2の半径が r なので. O_2を ズズズーっとズラしていけば. あたり前だ。



$=\dfrac{\pi r^2}{2}$



$=\dfrac{1}{2}(2r)^2\cdot\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2r\cdot\sqrt{3}r}{2}$

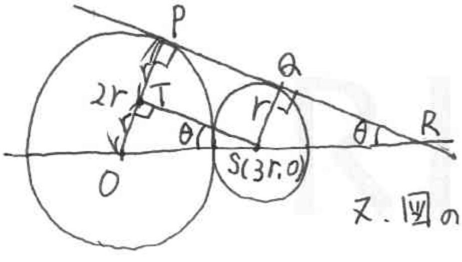
$=\dfrac{2}{3}\pi r^2-\sqrt{3}r^2$

こういうヤツは.
絶〜対に. 中心角
が具体的に分かる。
分からなければ. 積分しようが
何をしようが求まらない

よって. 斜線部の面積は. $\dfrac{\pi r^2}{2}+\left(\dfrac{2}{3}\pi r^2-\sqrt{3}r^2\right)$

$=\boxed{\left(\dfrac{7}{6}\pi-\sqrt{3}\right)r^2}$

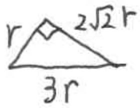
(2) 中心間距離＝半径の和となればよいので、 $a=2r+r=3r$



左図で OS＝SR（∵中点連結定理）となるので、

Rのx座標は $\boxed{6r}$

又、図のθに対して $\tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ より、lの傾きは $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$



従ってlの式は $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-6r)$

⇔ $\boxed{y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}r}$

これは、いろいろなやり方がある。

別解としては、・ l を $y=mx+n$ とおいて、2円と接することより、

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=2r,\quad \frac{|3mr+n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$$

絶対値内は共に正となるので、㊉ $\frac{n}{\sqrt{m^2+1}}=2r,\ \frac{3mr+n}{\sqrt{m^2+1}}=r$

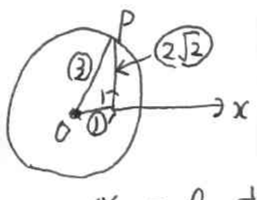
辺々わって、$\frac{3mr+n}{n}=\frac{1}{2}$ ∴ $n=-6mr$

これを㊉に代入、2乗して解くと、$n>0$に注意すると、

$(m,n)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}r\right)$

∴ $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{3}{\sqrt{2}}r$ //

・三角形の相似を利用して



OP＝2rより、Pの座標は

$\left(2r\cdot\frac{1}{3},\ 2r\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\left(\frac{2r}{3},\ \frac{4\sqrt{2}r}{3}\right)$

従ってlの式は $\frac{2r}{3}x+\frac{4\sqrt{2}r}{3}y=4r^2$

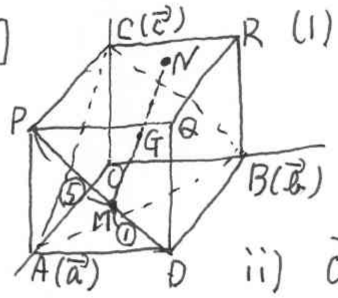
⇔ $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{3}{\sqrt{2}}r$ //

コメント

ケアレスミスをせずに、ペンが止まらなければ、どの問題も完答できる。
例年に比べると、計算量も少ないので、やはり、9割を確保したい。

近畿大学（前期）2011年度 －数学－ 解答速報

2



(1)

i) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OP}+5\overrightarrow{OD}}{6} = \dfrac{(\vec a+\vec c)+5(\vec a+\vec b)}{6} = \boxed{\dfrac{6\vec a+5\vec b+\vec c}{6}}$

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec a+\vec b+\vec c}{3} - \dfrac{6\vec a+5\vec b+\vec c}{6} = \boxed{\dfrac{-4\vec a-3\vec b+\vec c}{6}}$

ii) $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}$

$= \overrightarrow{OM} + s\overrightarrow{MG}$

$= \dfrac{6\vec a+5\vec b+\vec c}{6} + s\,\dfrac{-4\vec a-3\vec b+\vec c}{6} = \dfrac{(6-4s)\vec a+(5-3s)\vec b+(1+s)\vec c}{6}$

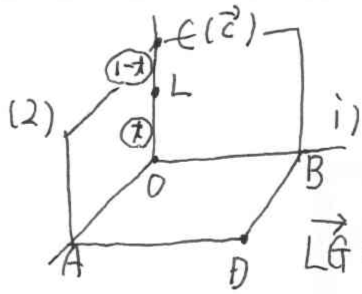
Nは平面OBC上にあるので、$\overrightarrow{ON}$を$\vec a, \vec b, \vec c$で表したときのaの係数は0

$\therefore\ 6-4s=0$　よって　$\boxed{s=\dfrac{3}{2}}$

iii) このとき、$\overrightarrow{ON} = \dfrac{(5-3\cdot\frac{3}{2})\vec b+(1+\frac{3}{2})\vec c}{6}$

$= \boxed{\dfrac{\vec b+5\vec c}{12}}$

(2)



i) $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OL} = (\vec a+\vec b)-t\vec c = \boxed{\vec a+\vec b-t\vec c}$

$\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OL} = \dfrac{\vec a+\vec b+\vec c}{3} - t\vec c = \boxed{\dfrac{\vec a+\vec b+(1-3t)\vec c}{3}}$

ii) $\overrightarrow{LD} \parallel \overrightarrow{LG}$となればよいので、　$\dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{\frac{1-3t}{3}}{-t}$

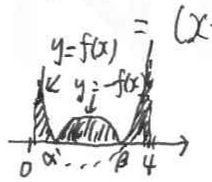
これを解くと、　$\boxed{t=\dfrac{1}{2}}$

3

(1) $f(x) = x^2-(3a+1)x+2a^2+2a$

$= (x-2a)(x-a-1)$　　よって、$f(x)=0$となるのは、$\boxed{x=2a,\ a+1}$

(2)



$S(a) = \int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta -f(x)\,dx + \int_\beta^4 f(x)\,dx$

$= \left[F(x)\right]_0^\alpha - \left[F(x)\right]_\alpha^\beta + \left[F(x)\right]_\beta^4$

$= F(\alpha)-F(0)-F(\beta)+F(\alpha)+F(4)-F(\beta)$

$= F(4)-F(0)+2\{F(\alpha)-F(\beta)\}$

左側が示された。

近畿大学（前期）2011年度 －数学－ 解答速報

ここで $F(\alpha)-F(\beta)=\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx$

$$=\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

よって $S(a)=\int_0^4|f(x)|\,dx=F(4)-F(0)+2\{F(\alpha)-F(\beta)\}=F(4)-F(0)+\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$

Q.E.D

(3) $F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x^2-(3a+1)x+2a^2+2a\right)dx$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

$F(4)=\frac{64}{3}-8(3a+1)+4(2a^2+2a)+C=8a^2-16a+\frac{40}{3}+C$, $F(0)=C$

$0<a<1$ のとき、$a+1>2a$ より. $\alpha=2a$, $\beta=a+1$, $\beta-\alpha=1-a$

よって $S(a)=8a^2-16a+\frac{40}{3}+C-C+\frac{(1-a)^3}{3}=\boxed{-\frac{1}{3}a^3+9a^2-17a+\frac{41}{3}}$

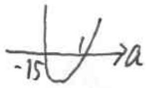
$1<a<2$ のとき. $a+1<2a$ なので. $\alpha=a+1$, $\beta=2a$, $\beta-\alpha=a-1$

よって $S(a)=8a^2-16a+\frac{40}{3}+C-C+\frac{(a-1)^3}{3}=\boxed{\frac{1}{3}a^3+7a^2-15a+13}$

(4) $0<a<1$ のとき. $S'(a)=-a^2+18a-17=-(a-1)(a-17)<0$ $(\because 0<a<1)$

よって単調減少//

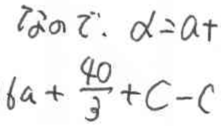
$1<a<2$ 〃 $S'(a)=a^2+14a-15=(a+15)(a-1)>0$ $(\because 1<a<2)$



よって単調増加//

又、$a=2$ のときも (3) の $S(a)$ の式は成立するので、連続である.

よって $S(a)$ のグラフは



$S(1)=-\frac{1}{3}+9-17+\frac{41}{3}=\boxed{\frac{16}{3}}$ ($a=1$のとき)

(3)で $S(a)$ の式をくくったままにしておくと見やすい.
ていねいな誘導にのって.やるだけ.
(4)で $a=2$ で連続であることに対するコメントは、解答内に含めるべき