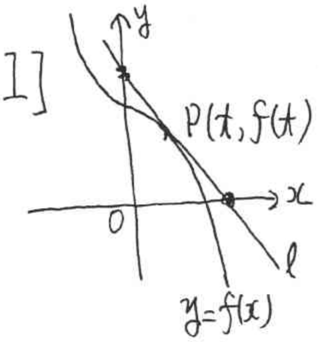
大阪医科大学（前期） 2011年度 －数学－ 解答速報

コメントは最後にあります。

[1]



(1) $f(x) = -x^3 - 3x + 10$

$f'(x) = -3x^2 - 3$

よって Pにおける接線の式は、

$y = (-3t^2 - 3)(x - t) - t^3 - 3t + 10$

$\Leftrightarrow \quad y = -3(t^2+1)x + 2t^3 + 10$

$y=0$ とおくと、 $x = \dfrac{2t^3+10}{3(t^2+1)}$ 　x軸との交点 $\left(\dfrac{2(t^3+5)}{3(t^2+1)}, 0\right)$

$x=0$ とおくと 　$y = 2t^3 + 10$ 　y軸との交点 $(0, 2t^3+10)$ 　(答)

(2) $t>0$ より 　$S(t) = \dfrac{2(t^3+5)}{3(t^2+1)} \cdot 2(t^3+5) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(t^3+5)^2}{t^2+1}$

$$S'(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2(t^3+5)\cdot 3t^2(t^2+1) - (t^3+5)^2 \cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{t(t^3+5)(2t^3+3t-5)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{t(t^3+5)(t-1)(2t^2+2t+5)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{t(t^3+5)(t-1)\cdot\left\{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right\}}{(t^2+1)^2}$$

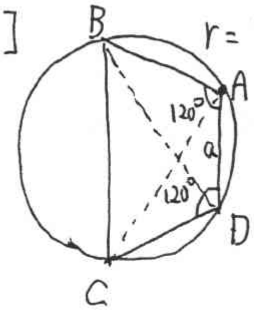
よって 増減表は、

t	0		1	
$S'(t)$	×	−	0	+
$S(t)$	×	↘	min	↗

最小値は、$t=1$ のとき。

$S(1) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{6^2}{2} = 12$ …(答)

[2]



(1) 正弦定理より、 $\dfrac{BD}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle D} = 2 \cdot 1$

$\sin\angle A = \sin\angle D = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 　よって、 $BD = AC = \sqrt{3}$ で aによらず一定 //

(2) $\triangle ACD$ と $\triangle DBA$ において、

$AC = DB$ (∵ (1))

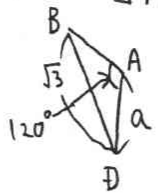
$\angle ACD = \angle DBA$ (∵ $\overset{\frown}{AD}$ に立つ円周角)。この角をαとする。

$\angle CAD = \angle BDA$ (∵ いずれも $180^\circ - 120^\circ - \alpha$)

以上より、 $\triangle ACD \equiv \triangle DBA$ (∵ 二角夾辺相等)

（〔2〕続き）

(3)



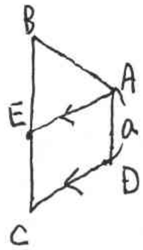
$\triangle ABD$ で、余弦定理より。 $(\sqrt{3})^2 = AB^2 + a^2 - 2a\cdot AB\cdot\cos 120^\circ$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 + a\cdot AB + a^2 - 3 = 0$$

$$\therefore \quad AB = \frac{-a \pm\sqrt{a^2 - 4(a^2-3)}}{2}$$

$$= \frac{-a \pm\sqrt{12-3a^2}}{2}$$

$AB > 0$, $a > 0$ より $\quad AB = \dfrac{-a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$



左図において、$AD \parallel BC$ $(\because \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ)$

よって、四角形AECDは平行四辺形なので、$EC = AD = a$

又、$\angle BEA = \angle BCD = 60^\circ$, $\angle ABE = 60^\circ$ より、$\triangle ABE$ は正三角形

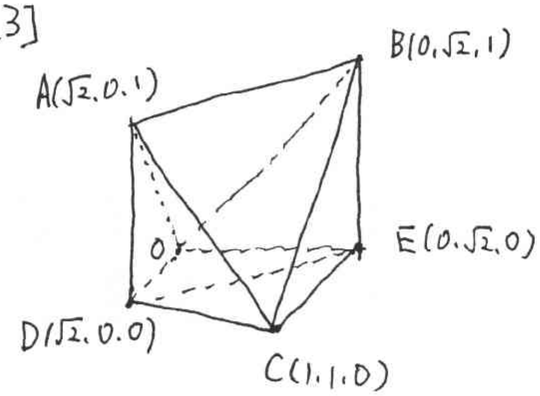
となるので、$BE = AB = \dfrac{-a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$

$$\therefore \quad BC = BE + EC = \frac{-a+\sqrt{12-3a^2}}{2} + a$$

$$= \frac{a+\sqrt{12-3a^2}}{2} \cdots \text{(答)}$$

(3)はトレミーの定理など、多くのやり方がある。

〔3〕



(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

より、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ 従ってADEBは平行四辺形 $\cdots$ ①

又、$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, -1)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)\cdot(0, 0, -1) = 0$

よって $\angle DAB = \dfrac{\pi}{2} \cdots$ ②

①、②より、四角形ADEBは長方形（証明終）

(2) $\overrightarrow{OC} = (1, 1, 0)$

直線OC⊥平面ADEB

ここで、$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)\cdot(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AD} = (1, 1, 0)\cdot(0, 0, -1) = 0$

よって OCは平面ADEB内の一次独立な2つのベクトルに共に垂直なので、

大阪医科大学(前期) 2011年度 －数学－ 解答速報

(3) Kの体積 …… $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2+2+0}=2$, $|\overrightarrow{AD}|=1$ より 長方形 ADEB $=2\cdot1=2$

又、K＝立体O-ADBE ＋ 立体C-ADBE

$$=2\cdot h\cdot\frac{1}{3}+2\cdot(\mathrm{OC}-h)\cdot\frac{1}{3}$$ (前者において、底面をADEBとみたときの高さをhとおいた)

$$=\frac{2}{3}\mathrm{OC}=\frac{2}{3}\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

四面体AODCの体積 …… 平面 ODC⊥AD より

$$\text{四面体AODC}=\triangle\mathrm{ODC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}|\sqrt{2}\cdot1-0\cdot1|\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

同様にすると、平面 OEC⊥EBより

$$\text{四面体BOEC}=\frac{1}{2}|1\cdot\sqrt{2}-0\cdot1|\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

よって 四面体 OABC＝K－四面体AODC－四面体BOEC

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

以上より 体積は それぞれ K … $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

四面体AODC＝$\frac{\sqrt{2}}{6}$ (答)

四面体OABC＝$\frac{\sqrt{2}}{3}$

[4]

(1) $$\int(t+1)e^t\,dt=\int(t+1)(e^t)'\,dt$$

$$=(t+1)e^t-\int e^t\,dt$$

$$=(t+1)e^t-e^t+\alpha$$ (αは積分定数)

$$=te^t+\alpha$$

従って $$\int_0^a(t+1)e^t\,dt=\left[te^t\right]_0^a=ae^a$$

（[4] 続き）

(2)

$$\int_k^{k+1} e^t dt = \left[e^t\right]_k^{k+1}$$
$$= e^{k+1} - e^k$$
$$= (e-1)\cdot e^k$$

これが、条件を満たす k に対して、常に Ae^k となるので、

$A = e-1$

$$\int_k^{k+1} (t+1)e^t dt = \left[te^t\right]_k^{k+1} \quad (\because (1))$$
$$= (k+1)e^{k+1} - ke^k$$
$$= e\cdot e^k + (e-1)\cdot ke^k$$

これが条件を満たす k に対して常に $Be^k + Cke^k$ となるので、 $B = e,\ C = e-1$

以上より $(A, B, C) = (e-1,\ e,\ e-1)$

(3)

(2) の $\int_k^{k+1} e^t dt = (e-1)e^k$ において、$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots n$ とした式を辺々加えると、

$$\int_0^{n+1} e^t dt = (e-1)\cdot\sum_{k=0}^{n} e^k$$ 又、左辺 $= \left[e^t\right]_0^{n+1} = e^{n+1} - 1$

よって $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$ ……(答)

(2) の $\int_k^{k+1} (t+1)e^t dt = e\cdot e^k + (e-1)\cdot ke^k$ において、$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ とした式を辺々加えると、

$$\int_0^{n+1} (t+1)e^t dt = e\sum_{k=0}^{n} e^k + (e-1)\cdot\sum_{k=0}^{n} ke^k$$

ここで 左辺 $= (n+1)e^{n+1}$ ，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$ より

$$\sum_{k=0}^{n} ke^k = \frac{1}{e-1}\left((n+1)e^{n+1} - e\cdot\frac{e^{n+1}-1}{e-1}\right)$$
$$= \frac{ne^{n+1}(e-1) - e(e^n - 1)}{(e-1)^2} \quad \text{……(答)}$$

誘導がなければ、(3) の前半は 等比数列の和の公式 後半は $S - rS$ で 求めることはできる。

大阪医科大学(前期) 2011年度 −数学− 解答速報

〔5〕

(1) はじめ

A: W1 R1　B: W1 R1

Sを1回行って Aの白が1枚となるのは、

$\begin{cases} A\to B \text{ が } W \\ B\to A \text{ が } W \end{cases}$ or $\begin{cases} A\to B \text{ が } R \\ B\to A \text{ が } R \end{cases}$ の2パターン

$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ …(答)

(2)

A: W1 R1　B: W1 R1 $\xrightarrow{S}$ A: W1 R1　B: W1 R1 となる確率は(1)より $\frac{1}{2}$

また、 A: W2 R0　B: W0 R2 のとき 及び A: W0 R2　B: W2 R0 のときは

Sによって必ず A: W1 R1　B: W1 R1 となる。

よって、 $P_{n+1}=P_n\cdot\frac{1}{2}+(1-P_n)\cdot 1$

$\Leftrightarrow\ P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+1$ …(答)

(3) (2)の漸化式を変形すると、 $P_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{2}{3}\right)$

$P_1=\frac{1}{2}$ より、 $P_n-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ よって $P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

従って、 $\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}$ …(答)

極めて平易。おそらく、過去の合格ラインよりはかなり上がるのではないか。

〔2〕(3) あたりで差がつくかと思われる。

いずれにしても、今までの大医と違い、数学では差がつかない。

9割程度、取りたいところだ。そして、他科目勝負。