コメントは2枚目の下デス.

大阪医科大学(後期) 2011年度 －数学－ 解答速報

[1] (1) $x^2+2bx+a^2-2a=0$ で, $a, b \in$ 実数, $x \in$ 虚数 なので,

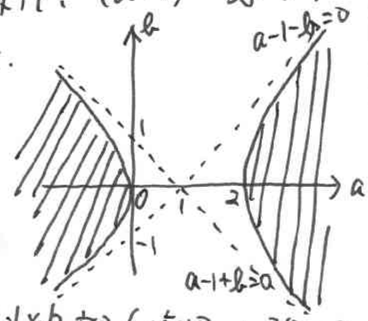
$D/4 = b^2-(a^2-2a) < 0$

$\Leftrightarrow \quad (a-1)^2-b^2>1$

$(a-1)^2-b^2=1$ の漸近線は, $a-1 \pm b=0$

以上より, 条件: $(a-1)^2-b^2>1$

図示すると,



斜線部(境界は除く) …(答)

(2) 解と係数の関係より, $\begin{cases} z+w=-2b \\ zw=a^2-2a \end{cases}$ ……㊀

又, $z=iw$ より $z^2=-w^2$ ($z^2=-w^2 \Leftrightarrow z=\pm iw$ だが, $z=-iw$ のとき,

$w=iz$ となり, z, w は適当に選べるので, $z^2=-w^2$ として問題はない)

つまり, $z^2+w^2=0$

$\Leftrightarrow (z+w)^2-2zw=0$

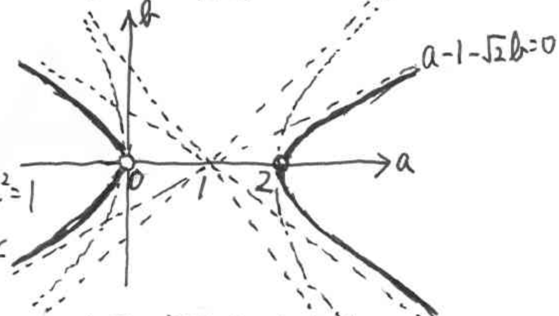
㊀より $(-2b)^2-2(a^2-2a)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2-2b^2=1$

解と係数の関係に結びつけるのがよいでしょう

漸近線は $(a-1)\pm\sqrt{2}b=0$

(1)の範囲内であることを考えると,



条件: $(a-1)^2-2b^2=1$

ただし, (0, 0)と(2, 0)は除く.

上図の実線(曲線)部. ただし, (0, 0)と(2, 0)は除く.

[2] (1) $x>0$, $y>0$ より, $f(x, y)$ を変形すると,

$f(x, y) = \left(\log_2 x \cdot \dfrac{2\log_2 x}{2}\right)^2 - \dfrac{2\log_2 x+2\log_2 y}{-1}\cdot(\log_2 y-\log_2 x)+\log_2 y\cdot(-\log_2 y) + \dfrac{2\log_2 y-2}{-1}$

($u=\log_2 x$, $v=\log_2 y$ とおくと)

$= u^4+2(u+v)(v-u)-v^2-2v+2$

$= u^4-2u^2+v^2-2v+2$ ……(答)

(2) $1.5<\log_2 3<2$ を示す.

$\Leftrightarrow \quad 3<2\log_2 3<4$ を示す.

$3=\log_2 8$

$2\log_2 3=\log_2 9$

$4=\log_2 16$

従って $\log_2 8<\log_2 9<\log_2 16$ であることより $3<2\log_2 3<4$

つまり $1.5<\log_2 3<2$ が示された

医学部専門予備校 リニア
〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14芝田町ビル8F
フリーコール 通話料無料 0800-888-1489
TEL.06-6372-1131 FAX.06-6372-1132
http://www.medical-school.jp/

大阪医科大学（後期） 2011年度 －数学－ 解答速報

(3) $f(x, y) = u^4 - 2u^2 + v^2 - 2v + 2$

$= (u^2 - 1)^2 + (v - 1)^2 \leqq 1$ …☆

「整数問題」なので、しっかり考えて！
なんとかシボッテ、あとは調べる。
(2)をしっかりと利用しよう。

ここで、u、v たちの取る値は

$\log_2 1 = 0$

$\log_2 2 = 1$

$\log_2 3$ …… $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$ (∵(2))

$\log_2 4 = 2$

値は増加する。

☆が成立するには、$(u^2-1)^2 \leqq 1$ が必要。

∴ $-1 \leqq u^2 - 1 \leqq 1 \iff 0 \leqq u^2 \leqq 2$

$x \geqq 3$ なら、$u \geqq \log_2 3 > 1.5$ となり、$u^2 > (1.5)^2 = 2.25$ なので不適

従って、$u = 0$ つまり $x = 1$ ……(ア)

又は

$u = 1$ つまり $x = 2$ …(イ)

(ア)のとき、☆は、$(v-1)^2 \leqq 0$ となり $v = 1$ つまり $y = 2$

(イ)のとき、☆は $(v-1)^2 \leqq 1$ となるので、$-1 \leqq v - 1 \leqq 1$

つまり、$0 \leqq v \leqq 2$

∴ $0 \leqq \log_2 y \leqq 2$

$\iff \log_2 1 \leqq \log_2 y \leqq \log_2 4$ ∴ $1 \leqq y \leqq 4$

yは正整数なので、$y = 1, 2, 3, 4$

以上より、$(x, y) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$ //

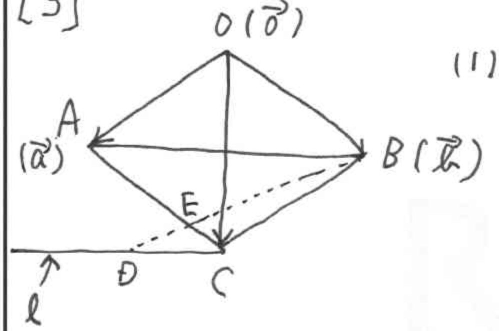
前期よりは格段に難化した。
考え込むような難問はないものの、全体的に計算量が多く、繁雑な問題が多い。
比較的、処理量の少ない[1],[2],[3]を8割程度、[4],[5]を6割程度取って、
全体で7割を超えれば、後期の狭き門の扉が開くでしょう。

それにしても、時間的にキツい問題でした。　お疲れサマです。

リニア 田中

大阪医科大学（後期）　解答速報
2011年度 －数学－

[3]



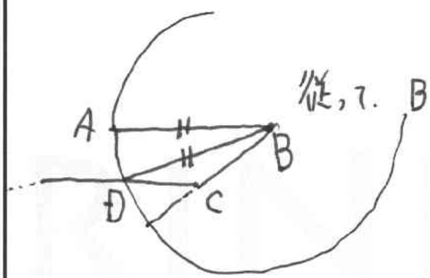
(1) 左図の半直線 ℓ 上に点 D を BA = BD となるように取ることができることを示せばよい。(四角形 OACB は一辺が1のひし形)

$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2-2k$

$\therefore\ |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2-2k}$

又、$|\overrightarrow{BC}| = |\vec{a}| = 1$

$k<\frac{1}{2}$ より $\sqrt{2-2k}>1$ なので $|\overrightarrow{BA}| > |\overrightarrow{BC}|$



従って、B を中心として、半径 $|\overrightarrow{BA}|$ の円は、ℓ と交わるので、その点を D とすればよい。

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}$

$= \vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a}-\vec{b}) - \vec{b}$

$= (1+t)\vec{a} - t\vec{b}$

前半部分は図形的に示したが、t の2次方程式の D が $k<\frac{1}{2}$ を用いると正であり、グラフが  となることより、正の解を持つと計算で押し切ってもよい。

$\overrightarrow{BD}$ の大きさが $\sqrt{2-2k}$ となればよいので、

$|\overrightarrow{BD}|^2 = (1+t)^2|\vec{a}|^2 - 2t(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

$= 2t^2 + 2t + 1 - 2t(1+t)k \quad (= 2-2k)$

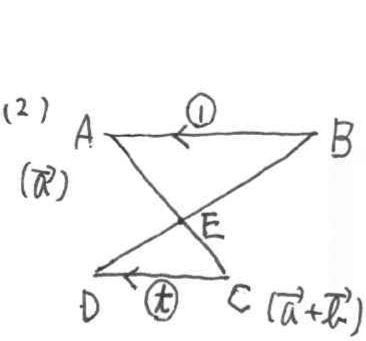
$\Leftrightarrow \quad (1-k)t^2 + (1-k)t + (k-\frac{1}{2}) = 0$

$k<\frac{1}{2}$ より t^2 の係数 >0，定数項 <0 で、前半部分より、実解を持つことは示されているので、異符号の2解を持つ。

よってそのうち、正のものは、$t = \dfrac{-(1-k)+\sqrt{(1-k)^2-4(1-k)(k-\frac{1}{2})}}{2(1-k)}$

$= \dfrac{-(1-k)+\sqrt{5k^2-8k+3}}{2(1-k)}$ //

(2)



左図で、AE : CE = AB : CD ($\because$ BA // CD)

$= 1 : t$ ($\because\ \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{BA}$)

$\therefore\ \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \dfrac{1}{1+t}\vec{b}$ //

一次独立なので… の係数比較でもそりゃ解けるが、やはり図形的に捉えましょう。

(3) $k=0$ のとき、$t=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{1+t}\vec{b}$ ($\because$ (2))　　$\therefore |\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{1+t}|\vec{b}|$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}+t(\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}$　　$=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\cdot 1$

$=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　　$=\sqrt{3}-1$

$$|\overrightarrow{AD}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0}+(1-t)^2|\vec{b}|^2$$

$$=t^2+(1-t)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}\right)^2$$

$$=(\sqrt{3}-1)^2 \qquad \therefore |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}-1$$

従って、AD=AEの二等辺三角形となる。

Q.E.D.

[4]

(1)

$$\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C_1$$

$$\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C_2$$

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_3,\quad \int\sin x\,dx=-\cos x+C_4,\quad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C_5$$

($C_1\sim C_5$ は積分定数)

$$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2x+a^2x^2+b^2+2ax\sin x+2b\sin x+2abx)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{a^2x^3}{3}+b^2x+2a(\sin x-x\cos x)-2b\cos x+abx^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{a^2\pi^3}{24}+\frac{b^2\pi}{2}+2a+\frac{ab\pi^2}{4}+2b$$

$$=\frac{\pi^3}{24}a^2+\frac{\pi^2}{4}ab+2a+\frac{\pi}{2}b^2+2b+\frac{\pi}{4}$$ //

計算するだけ。
工夫の余地もない。

(2) $p(a+qb+r)^2+sb^2+tb+u$ の展開式の各項と、Iの各項の係数を比較する。

問題中の式は、まず「aについて平方完成しろ」と言っているので、単純に平方完成してもよい。いずれにしても手間どくさい。

$$\begin{cases} a^2: & \dfrac{\pi^3}{24}=p \\ ab: & \dfrac{\pi^2}{4}=2pq \\ a: & 2=2pr \\ b^2: & \dfrac{\pi}{2}=pq^2+s \\ b: & 2=2pqr+t \\ \text{定数}: & \dfrac{\pi}{4}=pr^2+u \end{cases}$$

これらを $p\sim u$ について解くと、

$$(p,q,r,s,t,u)=\left(\frac{\pi^3}{24},\frac{3}{\pi},\frac{24}{\pi^3},\frac{\pi}{8},2-\frac{6}{\pi},\frac{\pi}{4}-\frac{24}{\pi^3}\right)$$

(3) $p>0,\ s>0$ より

先に $p,q,\cdots$ のまま、bのところを平方完成してしまおう。

$I=p(a+qb+r)^2+s\left(b+\dfrac{t}{2s}\right)^2-\dfrac{t^2}{4s}+u$ は、

$b+\dfrac{t}{2s}=0$ かつ $a+qb+r=0$ のときに最小値 $-\dfrac{t^2}{4s}+u$ をとる。

$$\therefore\ b=-\frac{t}{2s}=-\frac{2-\frac{6}{\pi}}{2\cdot\frac{\pi}{8}}=\frac{8(3-\pi)}{\pi^2}$$

$$a=-qb-r=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{8(3-\pi)}{\pi^2}-\frac{24}{\pi^3}=\frac{24(\pi-4)}{\pi^3}$$

よって $(a,b)=\left(\dfrac{24(\pi-4)}{\pi^3},\dfrac{8(3-\pi)}{\pi^2}\right)$ のとき。

医学部専門予備校 リニア
〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14 芝田町ビル8F
フリーコール 通話料無料 0800-888-1489
TEL.06-6372-1131 FAX.06-6372-1132
http://www.medical-school.jp/

[5]

(1) W(白) 5個, B(黒) 5個 $\xrightarrow{\text{同時に5個}}$ 多い方の個数をX

明らかに $X \geqq 3$ で.

$X=3$ となるのは. $\dfrac{{}_5C_3 \cdot {}_5C_2 \times 2}{{}_{10}C_5} = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 4} = \dfrac{50}{63}$

$X=4$ となるのは. $\dfrac{{}_5C_4 \cdot {}_5C_1 \times 2}{{}_{10}C_5} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 4} = \dfrac{25}{126}$

$X=5$ となるのは. $\dfrac{1 \cdot 2}{{}_{10}C_5} = \dfrac{2}{9 \cdot 7 \cdot 4} = \dfrac{1}{126}$

題意をしっかり把握できれば, (1)はeasy. (2)もしっかりとやっていくだけ---but ゴチャゴチャした数字が大変かも.

以上より表にすると

X	3	4	5	計
確率	$\frac{50}{63}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

//

(2)

	残す	袋 C, Cでない		
$X=3$ のトキ	3	2, 5	2個とる	(ア)
$X=4$ 〃	4	1, 5	1個とる	(イ)
$X=5$ 〃	5	0, 5	もう取らない.	(ウ)

(ア) → $Y=3$ $\quad \dfrac{50}{63} \times \dfrac{{}_5C_2}{{}_7C_2} = \dfrac{50}{63} \times \dfrac{10}{21} = \dfrac{100}{126} \times \dfrac{20}{42}$

(ア) → $Y=4$ $\quad \dfrac{50}{63} \times \dfrac{{}_2C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_7C_2} = \dfrac{50}{63} \times \dfrac{10}{21} = \dfrac{100}{126} \times \dfrac{20}{42}$

(ア) → $Y=5$ $\quad \dfrac{50}{63} \times \dfrac{1}{{}_7C_2} = \dfrac{50}{63} \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{100}{126} \times \dfrac{2}{42}$

(イ) → $Y=4$ $\quad \dfrac{25}{126} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{126} \times \dfrac{35}{42}$

(イ) → $Y=5$ $\quad \dfrac{25}{126} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{126} \times \dfrac{7}{42}$

(ウ) $(Y=5)$ $\quad \dfrac{1}{126} = \dfrac{1}{126} \times \dfrac{42}{42}$

以上より

$Y=3$ は $\dfrac{2000}{126 \times 42}$

$Y=4$ は $\dfrac{2000+875}{126 \times 42}$

$Y=5$ は $\dfrac{200+175+42}{126 \times 42}$

よって表にすると

Y	3	4	5	計
確率	$\frac{2000}{5292}$	$\frac{2875}{5292}$	$\frac{417}{5292}$	1

約分を行うなら.

Y	3	4	5	計
確率	$\frac{500}{1323}$	$\frac{2875}{5292}$	$\frac{417}{5292}$	1

//