近畿大学（前期）解答速報
2012年度 －数学－

1　$f(x)=2x^2-14x+\int_0^3 f(x)dx$

教科書の章末問題レベル。完答したい

コメントは最後です

(1) $\int_0^3 f(x)dx=A$ とおくと、$f(x)=2x^2-14x+A$

$\int_0^3 f(x)dx$ は定数なので、Aとおく。

$\therefore A=\int_0^3(2x^2-14x+A)dx$

$=\left[\frac{2x^3}{3}-7x^2+Ax\right]_0^3$

$=3A-45$　　$\therefore A=\frac{45}{2}$　　$\therefore \int_0^3 f(x)dx=\frac{45}{2}$

(2) $f(x)=2x^2-14x+\frac{45}{2}$

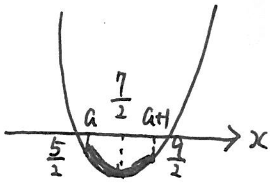
$=\frac{1}{2}\cdot(2x-5)(2x-9)$

よって $f(x)=0$ の解 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ は、

$x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{9}{2}$

(3) $f(x)=2x^2-14x+\frac{45}{2}$

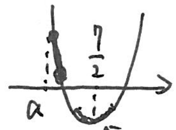
$=2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-2$



・$m(a)$ が一定値をとるのは、

$a\leqq\frac{7}{2}\leqq a+1$　つまり　$\frac{5}{2}\leqq a\leqq\frac{7}{2}$　のとき、$m(a)=m\left(\frac{7}{2}\right)=-2$

・$M(a)$ は、・$0\leqq a\leqq 3$ のとき、



$M(a)=f(a)=2a^2-14a+\frac{45}{2}$

$M(a)\leqq 6$ より　$2a^2-14a+\frac{45}{2}\leqq 6$

$\Leftrightarrow (2a-11)(2a-3)\leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\leqq a\leqq\frac{11}{2}$　　$0\leqq a\leqq 3$ より　$\frac{3}{2}\leqq a\leqq 3$ …①

・$3\leqq a$ のとき

$M(a)=f(a+1)=2(a+1)^2-14(a+1)+\frac{45}{2}$

$M(a)\leqq 6$ より　$2(a+1)^2-14(a+1)+\frac{45}{2}\leqq 6$

$\Leftrightarrow \{2(a+1)-11\}\{2(a+1)-3\}\leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{9}{2}$　　$3\leqq a$ より　$3\leqq a\leqq\frac{9}{2}$ …②

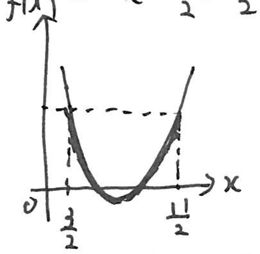
①、②より　$\frac{3}{2}\leqq a\leqq\frac{9}{2}$

後半については、下のように考えるとラク。

$f(x)=6$ を解くと、

$2x^2-14x+\frac{45}{2}=6$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}, \frac{11}{2}$

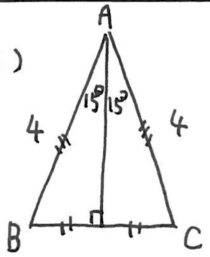


Max がこの太線内にあるのは　$\frac{3}{2}\leqq a$ かつ $a+1\leqq\frac{11}{2}$

よって　$\frac{3}{2}\leqq a\leqq\frac{9}{2}$

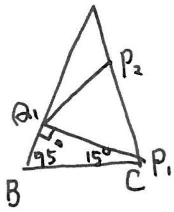
2

(1)



$$BC = 2\cdot 4\cdot \sin 15^\circ$$
$$= 8\sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$$

余弦定理は基本的には避けましょう。



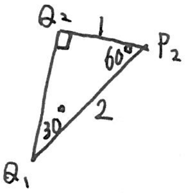
$$P_1P_2 = P_1Q_1$$
$$= BC\cos 15^\circ$$
$$= 8\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$
$$= 4\sin 30^\circ$$
$$= 2$$

このような「繰り返しの図形」は、等比数列になることが多い。一般には漸化式を立てることになるが、この問題では(1)のP_1P_2の値から、相似比 $1:\frac{1}{2}$（面積比 $1:\frac{1}{4}$）は明らか。

(2)

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

T_1：



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $AP_1 = 4,\ AP_2 = 4-2=2$ より $S_1, S_2, S_3, \cdots$ は相似比 $1:\frac{1}{2}$ で小さくなっていく正三角形の面積なので、

$$S_n = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$$

（∵面積比は $1:\left(\frac{1}{2}\right)^2$）

$S_n < \frac{1}{1000}$ とすると $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} < \frac{1}{1000}$

$n=6$のとき 左辺 $= \frac{\sqrt{3}}{2^{10}} = \frac{1.73\cdots}{1024} > \frac{1}{1000}$

$n=7$のとき 左辺 $= \frac{\sqrt{3}}{2^{12}} = \frac{1.73\cdots}{4096} < \frac{1}{1000}$　よって $n=7$

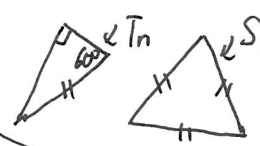
(4)

T_nもS_nと同様に相似比 $1:\frac{1}{2}$ で小さくなっていくので、

$$T_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{5} T_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{1024}\right) = \frac{341\sqrt{3}}{512}$$

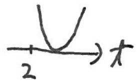
$T_n = \frac{1}{2}S_n$ を用いてもよい。



3 (1) $f(x)=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2+2p\left(5^x+\frac{1}{5^x}-1\right)+7$

$= t^2+2p(t-1)+5$

$= t^2+2pt+5-2p = g(t)$

(2), (3) は、問題設定が、$x\in R$. $t=5^x+\frac{1}{5^x}$ となっているので、$t\geqq 2$ (∵相加相乗) なので、「$g(t)=0$ が実数解を1個持つ」は、「$g(t)=0$ が $t\geqq 2$ で実数解を1つ持つ」と解釈することも可能だが、(そうすると、 or )、冒頭の $x\in R$、$t=5^x+\frac{1}{5^x}$ の設定を無視して、"新たな t についての2次方程式 $g(t)=0$ が実数解を1つ持つ" という問題として解く。

(2) $g(t)=t^2+2pt+5-2p=0$ の判別式 $D=0$ となればよいので、

$D/4=p^2-5+2p$

$=p^2+2p-5=0$ ∴ $p=-1\pm\sqrt{6}$

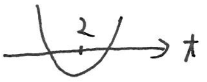
このとき、$g(t)=(t+p)^2$ なので $g(t)=0$ の解は $t=-p=-(-1\pm\sqrt{6})$

よって $(p, t)=(-1\pm\sqrt{6},\ 1\mp\sqrt{6})$

(複号同順)

(3) a) $t_1<2$, $t_2>2$

$g(2)=2p+9<0$ ∴ $p<-\frac{9}{2}$



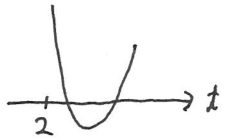
b) $t_1=2$ のとき $g(2)=2p+9=0$ より $p=-\frac{9}{2}$

このとき、$g(t)=t^2-9t+14$

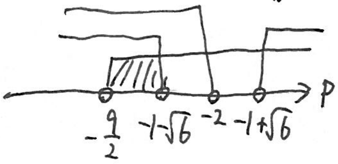
$=(t-2)(t-7)$ より $t_2=7>2$ (O.K.)

∴ $p=-\frac{9}{2}$

c) $2 < t_1 < t_2$

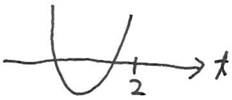


$$\begin{cases} g(2) > 0 \\ 軸 > 2 \\ D > 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2p+9 > 0 \\ -p > 2 \\ p^2+2p-5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p > -\frac{9}{2} \\ p < -2 \\ p < -1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6} < p \end{cases}$$

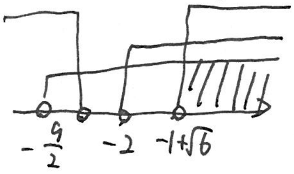


よって $-\frac{9}{2} < p < -1-\sqrt{6}$

d)



$$\begin{cases} g(2) > 0 \\ 軸 < 2 \\ D > 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2p+9 > 0 \\ -p < 2 \\ p^2+2p-5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p > -\frac{9}{2} \\ p > -2 \\ p < -1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6} < p \end{cases}$$



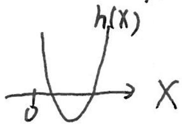
よって $p > -1+\sqrt{6}$

(4)

解1) $5^x = X$ とおくと $X > 0$ で x と X は1対1の対応.

よって $t = X + \frac{1}{X}$ つまり $\underbrace{X^2 - tX + 1}_{h(X)} = 0$ が $X > 0$ で異なる2解を持てばよい.

$h(X)$ とおく.

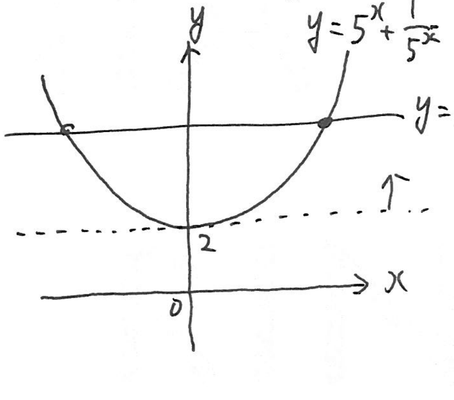


$$\begin{cases} h(0) = 1 > 0 \quad (\text{o.k.}) \\ 軸: \frac{t}{2} > 0 \iff t > 0 \\ D = t^2 - 4 > 0 \iff t < -2,\ 2 < t \end{cases}$$

$\therefore t > 2$

解2) $y = t$ と $y = 5^x + \frac{1}{5^x}$ のグラフが異なる2点で交わればよい.

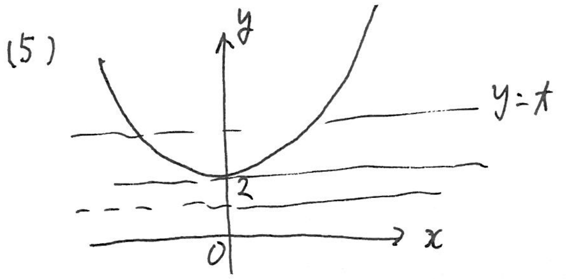
$y = 5^x + \frac{1}{5^x} \geqq 2$ (等号は $x=0$ のとき. ∵相加相乗平均)



よって $t > 2$

近畿大学（前期）2012年度 －数学－ 解答速報

(5)



$$\begin{cases} t<2 \text{ のときは、} & t\,1\text{つ} \to x\text{ なし} \\ t=2 \quad 〃 & t\,1\text{つ} \to x\,1\text{つ} \\ t>2 \quad 〃 & t\,1\text{つ} \to x\,2\text{つ} \end{cases}$$

$g(t)=0$ の $D<0$ つまり $-1-\sqrt{6}<t<-1+\sqrt{6}$ のトキ　0個

(2)、(3)より、$t_1<t_2<2$，$t_1=t_2<2$　つまり　$p\geqq -1+\sqrt{6}$ のトキ　0個

$t_1<2<t_2$　つまり　$p<-\frac{9}{2}$ のトキ　2個

t の1つが2のトキは　$t_1=2$，$t_2>2$　つまり　$p=-\frac{9}{2}$ のトキ　3個

$2<t_1<t_2$　つまり　$-\frac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}$ のトキ　4個

$2<t_1\leqq t_2$　つまり　$p=-1-\sqrt{6}$ のトキ　2個

以上より、

答　$$\begin{cases} p<-\frac{9}{2} \text{ のトキ 2個} \\ p=-\frac{9}{2} \text{ のトキ 3個} \\ -\frac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6} \text{ のトキ 4個} \\ p=-1-\sqrt{6} \text{ のトキ 2個} \\ p>-1-\sqrt{6} \text{ のトキ 0個} \end{cases}$$

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$は完答したい。

$\boxed{3}$は少々、ややこしい。時間内に処理しきれるかどうか…。

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$完答、$\boxed{3}$を半分以上取って8割以上が合格ラインか！

リニア　田地