大阪医科大学（前期） 2012年度 － 数学 － 解答速報

[1]

!コメントは2枚目の下です!

(1)

$n \geqq 4$ のとき．　$S_n = -n^3+6n^2-11n+6+(n-2)a_n$ ……☆

$$\begin{array}{rl} -) & S_{n-1} = -(n-1)^3+6(n-1)^2-11(n-1)+6+(n-3)a_{n-1} \\ \hline & a_n = -3n^2+15n-18+(n-2)a_n-(n-3)a_{n-1} \end{array}$$

$\Leftrightarrow (n-3)a_n = 3(n-2)(n-3)+(n-3)a_{n-1}$

$n=2$ のトキは別に調べれば（確認すれば）よい

$n \neq 3$ より　$a_n = a_{n-1}+3(n-2)$ ……①

又，☆で $n=1$ とおくと　$\underbrace{S_1}_{a_1} = -1+6-11+6-a_1$　$\therefore 2a_1=0$　$\therefore a_1=0$

$n=2$ 〃　$\underbrace{S_2}_{a_1+a_2} = -8+24-22+6$　$\therefore a_2=0$

よって ①は $n=2$ のときでも成立している．

以上より，$a_n = a_{n-1}+3(n-2)$

$(n \geqq 2,\ n \neq 3)$

(2)

$n \geqq 4$ のとき．

$$\begin{array}{rl} & a_n = \cancel{a_{n-1}}+3(n-2) \\ & \cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}}+3(n-3) \\ & \cancel{a_{n-2}} = \cancel{a_{n-3}}+3(n-4) \\ & \vdots \\ +) & \cancel{a_4} = a_3+3\cdot(4-2) \\ \hline \end{array}$$

$a_n = a_3+\sum_{k=4}^{n} 3(k-2)$

$= 3+3\cdot\dfrac{2+(n-2)}{2}\cdot(n-3)$

$= \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{9}{2}n+3$

これは $n=1,2,3$ でも成立している

以上より，$a_n = \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{9}{2}n+3$ //

定義されている n の値に対して，慎重に答案を書いていけたかどうか．
答は合っていても，途中が乱暴だと減点される．

(3)

(2)より、$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{9}{2}n+3$

$=\frac{3(n-1)(n-2)}{2}$

∴ $n\geqq 3$のとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3(n-1)(n-2)}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2(n-2)}{3(n-1)}\quad //$$

昨年度は、大医史上 最もeasyな問題だったが、

本年度は、一問一問 なかなかの歯ごたえがある。

答があっているかどうか だけでなく、記述部分

でも差が大きくつきそう。

65%の得点(65%答があっているかどうかではない)

があれば、圏内か。

リニア 田[illegible]

[2] (1)

$$\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ちょっと有名な形

(2) $y=\sqrt{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

よって $x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+1}=y$$

(3) $y=\sqrt{x^2+1}$ とおくと、(2) を用いて、

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int y\,dx$$

$$=\int\left(x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\right)dx$$

$$=\underbrace{\int x\frac{dy}{dx}\cdot dx}_{\text{ア}}+\underbrace{\int\frac{1}{y}dx}_{\text{イ}}$$

ア に対して、(2) が、「部分積分してみよう」の誘導であることに気付けたかどうかが最大のポイント。

ア $=\int x\,dy$ とすると、

どうどうめぐりに……

大阪医科大学（前期）2012年度 －数学－ 解答速報

㋐ $= \int x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot dx$

$= xy - \int y\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}\,dx$

同じ形がでてきた♪

㋑ $= \int \dfrac{1}{y}\,dx$

$= \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

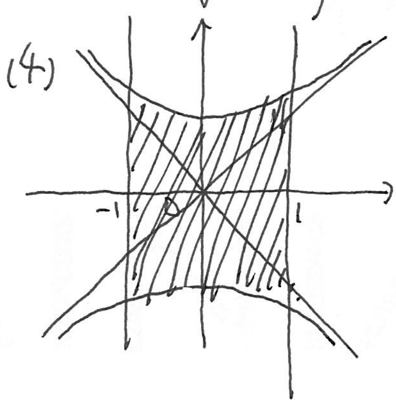
$= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C_1$ （C_1は積分定数）（∵(1)）

よって $\int\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}\,dx + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$\therefore\ 2\int\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C_2$ （C_2は積分定数）

$\therefore\ \int\sqrt{x^2+1}\,dx = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) + C$ （Cは積分定数）

(4)



$y^2 = x^2+1$ で第1象限において，$y = \sqrt{x^2+1}$

(3)ができた人へのサービス問題

$S = 4\int_0^1 y\,dx$

$= 4\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

$= 4\cdot\dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$

$= 2\left(1\cdot\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)$

$= 2\sqrt{2} + 2\log(1+\sqrt{2})$ 答

大阪医科大学（前期） 2012年度 －数学－ 解答速報

[3]

(1) $a \leqq 6$ とすると $a^2 \leqq 36$ で $a \geqq b \geqq c$ より

$$a^2+b^2+c^2 \leqq a^2+a^2+a^2 = 3a^2 \leqq 108$$

つまり $a^2+b^2+c^2 \leqq 108$ なので $a^2+b^2+c^2=114$ とはならないので矛盾.

背理法で

$a \geqq 11$ とすると $a^2 \geqq 121$

従って $a^2+b^2+c^2 \geqq 121+\underbrace{b^2+c^2}_{正}$ となるので

$a^2+b^2+c^2=114$ とはならず, やはり矛盾.

従って, 解があるなら, $7 \leqq a \leqq 10$

(2) □と△を4でわった余りが等しいことを □≡△ と表すことにする.

一般に自然数 m は $m \equiv 0, 1, 2, 3$ のどれかに属す.

mod.2では無理.
mod.4で調べてみる

$m \equiv 0$ のとき $m^2 \equiv 0$

$m \equiv 1$ のとき $m^2 \equiv 1$

$m \equiv 2$ のとき $m^2 \equiv 4 \equiv 0$

$m \equiv 3$ のとき $m^2 \equiv 9 \equiv 1$

よって $a^2+b^2+c^2 \equiv 2$ となるのは, a^2, b^2, c^2 のうち2つが1で,

1つが0のとき. つまり a, b, c のうち, 1つが偶数, 2つが奇数 //

(3) $114 = 4 \times 38 + 2$ なので, (2)より, a, b, c のうち1つが偶数で, 他は奇数

たいして(2)は役に立たない(涙)

(1)より $a=7, 8, 9, 10$ を調べれば十分. これらのことに注目して調べると

$a=7$ のとき $b^2+c^2=114-49=65$ これをみたす(a, c)は ~~(8, 1)~~ と $(7, 4)$ $a \geqq b$に反する.

$a=8$ 〃 $b^2+c^2=114-64=50$ 〃 $(7, 1)$ と $(5, 5)$

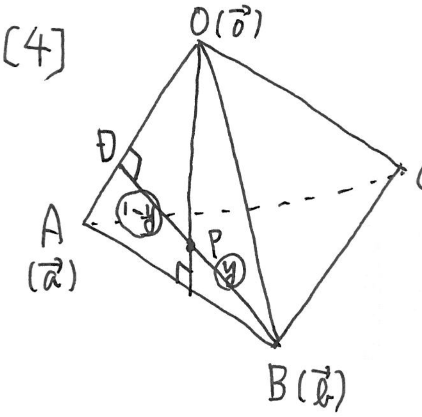
$a=9$ 〃 $b^2+c^2=114-81=33$ 〃 なし

$a=10$ 〃 $b^2+c^2=114-100=14$ 〃 なし

以上より $(a, b, c)=(7, 7, 4), (8, 7, 1), (8, 5, 5)$ //

大阪医科大学（前期） 2012年度 －数学－ 解答速報

〔4〕



(1) $\overrightarrow{OD} = x\vec{a}$ とすると.

OA⊥BDより $\vec{a}\cdot(x\vec{a}-\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow x|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\therefore xa^2 - f = 0 \quad \therefore x = \dfrac{f}{a^2}$

正射影を用いても よい

よって $\overrightarrow{OD} = \dfrac{f}{a^2}\vec{a}$ //

(2) DP : PB = 1−y : y とおくと $\overrightarrow{OP} = y\overrightarrow{OD} + (1-y)\overrightarrow{OB}$

$= \dfrac{f}{a^2}y\vec{a} + (1-y)\vec{b}$

OP⊥ABより、 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{f}{a^2}y\vec{a} + (1-y)\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$= -\dfrac{f}{a^2}y\cdot a^2 + (1-y)b^2 + \left(\dfrac{f}{a^2}y - (1-y)\right)\cdot f$

$= \dfrac{f^2-a^2b^2}{a^2}\cdot y + b^2 - f = 0$

普通は.
$\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ とおいて.
内積を2回取るが、(1)の
誘導に乗ってみた.

$\therefore y = \dfrac{a^2(f-b^2)}{f^2-a^2b^2} \quad (\because \vec{a}\cdot\vec{b} \neq |\vec{a}||\vec{b}|)$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \dfrac{f}{a^2}\cdot\dfrac{a^2(f-b^2)}{f^2-a^2b^2}\vec{a} + \left(1 - \dfrac{a^2(f-b^2)}{f^2-a^2b^2}\right)\vec{b}$

$= \dfrac{f(f-b^2)}{f^2-a^2b^2}\vec{a} + \dfrac{f(f-a^2)}{f^2-a^2b^2}\vec{b}$ //

(3) $a=b=c=1$, $f=g=h$ より.

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{f(f-1)}{f^2-1}(\vec{a}+\vec{b}) = \dfrac{f}{f+1}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ についても同様にすると、 $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{f}{f+1}(\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{OR} = \dfrac{f}{f+1}(\vec{c}+\vec{a})$

PとCを $\frac{f}{f+1}:1$ つまり $f:f+1$ に内分する点をM'とすると、

「交点は連立」をまじめにやると大変。
バランス、対称性を考慮して、
しっかり見切れば。

$$\overrightarrow{OM'}=\frac{(f+1)\overrightarrow{OP}+f\cdot\overrightarrow{OC}}{f+(f+1)}$$

$$=\frac{1}{2f+1}\left\{(f+1)\cdot\frac{f}{f+1}(\vec{a}+\vec{b})+f(\vec{c})\right\}$$

$$=\frac{f}{2f+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

同様にして、QとAを $f:f+1$ に内分する点M''、およびRとBを

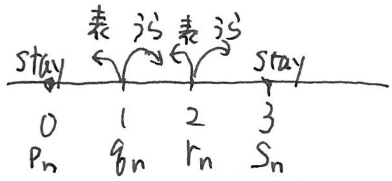
$f:f+1$ に内分する点M'''に対しても、

$$\overrightarrow{OM''}=\overrightarrow{OM'''}=\frac{f}{2f+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$ となるので、

M', M'', M'''は一致し、つまり、3直線AQ, BR, CPは一点で交わる。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{f}{2f+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$ //

[5]



(1) $p_0=r_0=s_n=0,\ q_n=1$

$p_1=p_0+\frac{1}{2}q_0=\frac{1}{2}$, $q_1=\frac{1}{2}r_0=0$ 　肩ならし

$r_1=\frac{1}{2}q_0=\frac{1}{2}$, $s_1=\frac{1}{2}r_0+s_0=0$

$p_2=p_1+\frac{1}{2}q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=\frac{1}{2}r_1=\frac{1}{4}$

$r_2=\frac{1}{2}q_1=0$, $s_2=\frac{1}{2}r_1+s_1=\frac{1}{4}$

よって $(p_2,q_2,r_2,s_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right)$

(2)
$$\begin{cases} p_n=\underbrace{p_{n-1}}_{\text{動かず}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{表}}q_{n-1} \\ q_n=\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{表}}r_{n-1} \\ r_n=\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{裏}}q_{n-1} \\ s_n=\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{裏}}r_{n-1}+\underbrace{s_{n-1}}_{\text{動かず}} \end{cases}$$

状況を正確に取らえよう

これをもう一度用いると、

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{2}q_{n-1}$$
$$=\left(p_{n-2}+\frac{1}{2}q_{n-2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r_{n-2}$$
$$=p_{n-2}+\frac{1}{2}q_{n-2}+\frac{1}{4}r_{n-2}$$

$$q_n=\frac{1}{2}r_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}q_{n-2}$$
$$=\frac{1}{4}q_{n-2}$$

$$r_n=\frac{1}{2}q_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r_{n-2}$$
$$=\frac{1}{4}r_{n-2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}r_{n-1} + S_{n-1}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}q_{n-2} + \left(\frac{1}{2}r_{n-2} + S_{n-2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}q_{n-2} + \frac{1}{2}r_{n-2} + S_{n-2}$$

以上より
$$\begin{cases} P_n = P_{n-2} + \frac{1}{2}q_{n-2} + \frac{1}{4}r_{n-2} \\ q_n = \frac{1}{4}q_{n-2} \\ r_n = \frac{1}{4}r_{n-2} \\ S_n = \frac{1}{4}q_{n-2} + \frac{1}{2}r_{n-2} + S_{n-2} \end{cases}$$ （答）

ここ、ミスらないように。（検算すればわかる）

(3) nが偶数のとき、$q_0 = 1$ より　$q_n = 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$r_0 = 0$ より　$r_n = 0$

$$\therefore\ P_n = P_{n-2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = P_{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ P_0 = 0$$

$n \geqq 2$ で　$P_n = P_0 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{4}$，項数 $\frac{n}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(3)は、漸化式なしで、普通に考えたほうが分かりやすい気がするが、誘導には乗ってみるもの。

$$S_n = 1 - (P_n + q_n + r_n)$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 0$$
$$= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

以上より
$$\begin{cases} P_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ r_n = 0 \\ S_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{cases}$$