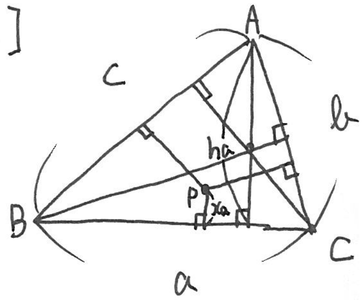
大阪医科大学（前期）2013年度 －数学－ 解答速報

[1]



(1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$ なので、

$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ が成立する //

(2) $\triangle ABC = S$ とおくと、(1)より $a h_a = b h_b = c h_c = 2S \cdots$ ㋐

又、$\triangle ABC = \triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB$

$= \frac{1}{2} a x_a + \frac{1}{2} b x_b + \frac{1}{2} c x_c = S \cdots\cdots$ ①

ここで $\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} = \frac{a x_a}{2S} + \frac{b x_b}{2S} + \frac{c x_c}{2S}$ （∵㋐）

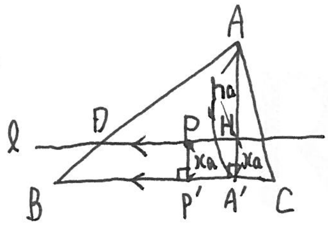
$= \frac{1}{S}\left(\frac{1}{2} a x_a + \frac{1}{2} b x_b + \frac{1}{2} c x_c\right)$

$= \frac{1}{S} \cdot S$ （∵①）

$= 1$ ＝一定　Q.E.D.

コメントは3枚目の下側にあります♪

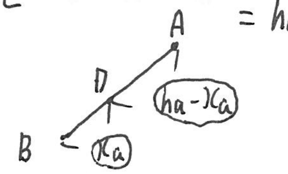
(3)



左図のようにとると、$BC \parallel l$ より、

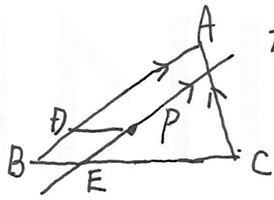
$AD : DB = AH : HA'$

$= h_a - x_a : x_a$



$\therefore \overrightarrow{OD} = \dfrac{x_a \overrightarrow{OA} + (h_a - x_a)\overrightarrow{OB}}{x_a + (h_a - x_a)} = \dfrac{x_a \overrightarrow{OA} + (h_a - x_a)\overrightarrow{OB}}{h_a}$ //

(4)



左図のようにとる

(3)と同様に考えると、$CE : EB = h_c - x_c : x_c$

又、四角形BDPEは平行四辺形で、$\overrightarrow{BD} = \frac{x_a}{h_a}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{x_c}{h_c}\overrightarrow{BC}$ なので、

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = \frac{x_a}{h_a}\overrightarrow{BA} + \frac{x_c}{h_c}\overrightarrow{BC}$

従って、$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$

$= \overrightarrow{OB} + \frac{x_a}{h_a}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \frac{x_c}{h_c}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$= \frac{x_a}{h_a}\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{x_a}{h_a} - \frac{x_c}{h_c}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{x_c}{h_c}\overrightarrow{OC}$

$= \frac{x_a}{h_a}\overrightarrow{OA} + \frac{x_b}{h_b}\overrightarrow{OB} + \frac{x_c}{h_c}\overrightarrow{OC}$ （∵(2)）

このとき、$k = \frac{x_a}{h_a}$, $l = \frac{x_b}{h_b}$, $m = \frac{x_c}{h_c}$

とすれば、確かに $k + l + m = 1$ となり、条件をみたす。

$k = \frac{x_a}{h_a}$, $l = \frac{x_b}{h_b}$, $m = \frac{x_c}{h_c}$ //

・英語の解答をご希望の方はお気軽にお問合わせくださいませ。
後日ご郵送いたします。

[2]

(1) $c^2=c+1 \iff c^2-c-1=0$

$\therefore c=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 　 $c>0$より $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ここで$\sqrt{5}$が有理数とすると $\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, nは互いに素な整数) とおけて、変形すると、
$5m^2=n^2$。従って $n=5n'$ (n'は整数) となり、さらに $m^2=5n'^2$ となるので、
$m=5m'$ (m'は整数) となる。よってm, nは互いに素であることに反する。よって$\sqrt{5}$は無理数。

$\dfrac{\text{有理数}+\text{無理数}}{\text{有理数}}$ は無理数なので、題意成立。

(2) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき、$c^k=a_kc+b_k$ をみたす整数の組 (a_k, b_k) が存在すると仮定すると、

$n=k+1$のとき、

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= c^k\cdot c \\ &= (a_kc+b_k)\cdot c \\ &= a_kc^2+b_k\cdot c \\ &= a_k(c+1)+b_kc \\ &= (a_k+b_k)c+a_k \end{aligned}$$

ここで、$a_{k+1}=a_k+b_k$, $b_{k+1}=a_k$ とおくと、仮定より a_{k+1}, b_{k+1} も整数となるので、$n=k+1$ でも成立する。

$n=1$のとき、$(a_1, b_1)=(1, 0)$ として存在している。

以上より、数学的帰納法より、題意は成立する。

(3) 条件より $a_nc+b_n=a_n'c+b_n'$

$\iff (a_n-a_n')c=-(b_n-b_n')$

ここで、a_n, a_n', b_n, b_n'は有理数、cは無理数より

$a_n-a_n'=0$, $b_n-b_n'=0$ 　 $\therefore a_n=a_n'$, $b_n=b_n'$ //

(4)

$$
\begin{aligned}
c^{mn} &= (c^n)^m \\
&= (a_n c + b_n)^m \\
&= {}_mC_0 (a_n c)^m + {}_mC_1 (a_n c)^{m-1} b_n + \cdots\cdots + {}_mC_{m-1}\, a_n c\, b_n^{m-1} + {}_mC_m\, b_n^m \\
&= {}_mC_0\, a_n^m \cdot (a_m c + b_m) + {}_mC_1\, a_n^{m-1} b_n (a_{m-1} c + b_{m-1}) + \cdots\cdots \\
&\qquad + {}_mC_m\, b_n^m \\
&= \underbrace{a_n({}_mC_0\, a_n^{m-1} a_m + {}_mC_1\, a_n^{m-2} b_n a_{m-1} + \cdots\cdots + {}_mC_{m-1}\, b_n^{m-1})} c + 整数.
\end{aligned}
$$

従って 〰〰 $= a_{mn}$ であり、(　)内は整数だけの和、積なので整数。

$\therefore$ a_{mn} は a_n の倍数。

100分という時間の割には処理量、難度ともかなりキツイ。

[1]は図形に対する練習量がモノを言う。

[2]の(1)～(3)はeasyだが、(4)は無理であろう。

[3]は(1)の左側の不等式がややメンドウだが、それを乗り切れれば

(2)、(3)は(1)を上手に使う。(1)ができなくても、(2)、(3)だけでも。

[4]は、過去に類題があるが、少々作業量は多い。

同じような問題に出会ったことのある受験生は有利か。

[5]は、昨年度関西医大と同じ表現。(4)は(1)からでも出せるが、

出題者の意図とは違う。

6割取れればO.K.でしょう！

〒530-0012
大阪市北区芝田1-4-14 芝田町ビル8F
フリーコール 通話料無料 0800-888-1489
TEL.06-6372-1131 FAX.06-6372-1132
http://www.medical-school.jp/

大阪医科大学（前期）解答速報
2013年度 － 数学 －

〔3〕 (1) $\underbrace{-\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta} < \log\cos\theta}_{(ア)}$ $\underbrace{\log\cos\theta < -\frac{\theta^2}{2}}_{(イ)}$ を示す

(ア)について. $f(\theta) = \log\cos\theta - \left(-\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$= \log\cos\theta + \frac{\theta^2}{2\cos\theta}$ とおく. $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\theta\cos\theta + \theta^2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2\theta\cos\theta + \theta^2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$$

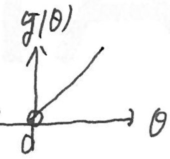
分子 $= g(\theta)$ とおくて.

$$g'(\theta) = 2(\cos\theta - \theta\sin\theta) + 2\theta\sin\theta + \theta^2\cos\theta - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= 2\cos\theta + \theta^2\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$$

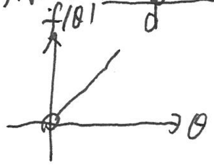
$$= 2\cos\theta(1-\cos\theta) + \theta^2\cos\theta + 2\sin^2\theta \geqq 0$$

よって $g(\theta)$ は単調増加で. $g(0) = 0$ より. $g(\theta)$ のグラフは右図.



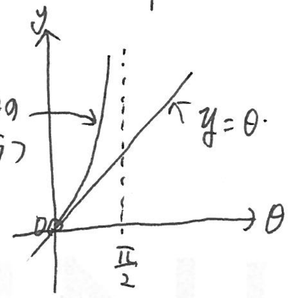
従って. $f'(\theta) \geqq 0$. ∴ $f(\theta)$ は単調増加.

又. $f(0) = 0$ なので. $f(\theta)$ のグラフは右図



∴ $f(\theta) > 0$ よって (ア) は成立する.

(イ)について. $h(\theta) = -\frac{\theta^2}{2} - \log\cos\theta$ とおくと



$$h'(\theta) = -\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \tan\theta - \theta > 0$ (∵右図)

よって (イ) は成立する. 以上より示された.

(2) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で. n が十分に大きいとき. $0<\frac{\theta}{n}<\frac{\pi}{2}$ なので.

(1) の θ を $\frac{\theta}{n}$ とおくと. $-\frac{\theta^2}{2n^2\cos\frac{\theta}{n}} < \log\cos\frac{\theta}{n} < -\frac{\theta^2}{2n^2}$ …… ㋐

n をかけて. $-\frac{\theta^2}{2n\cos\frac{\theta}{n}} < \log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n < -\frac{\theta^2}{2n}$

ここで. $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2n\cos\frac{\theta}{n}}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2n}\right) = 0$ より.

$\lim_{n\to\infty}\log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n = 0$ (∵ハサミウチの原理) ∴ $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n = 1$ //

(3)

(2)の ㋐ の式の両辺に n^2 をかけると、

$$-\frac{\theta^2}{2\cos\frac{\theta}{n}} < \log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2} < -\frac{\theta^2}{2}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2\cos\frac{\theta}{n}}\right) = -\frac{\theta^2}{2}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2} = -\frac{\theta^2}{2}$ （∵ハサミウチの原理）

従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{\theta^2}{2}}$ //

[4]

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sin m\pi x\cdot\sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\{\cos(m+n)\pi x - \cos(m-n)\pi x\}\,dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\pi}\sin(m+n)\pi x + \frac{\sin(m-n)\pi x}{(m-n)\pi}\right]_{-1}^{1} = 0$ // （∵$\sin$(整数)$\pi = 0$）

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sin^2 n\pi x\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1-\cos 2n\pi x}{2}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right]_{-1}^{1} = 1$ //

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{1}x\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)'dx$

$\displaystyle = \left[-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,dx$

$\displaystyle = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{-\cos(-n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_{-1}^{1}$

$\displaystyle = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi}$ //

注 n が奇数のとき $\dfrac{2}{n\pi}$、n が偶数のとき $-\dfrac{2}{n\pi}$ と答えてもよい。

(4) $(x - f(x))^2 = (x - c_1\sin\pi x - c_2\sin 2\pi x - c_3\sin 3\pi x - \cdots\cdots - c_n\sin n\pi x)^2$

(1), (2), (3) を用いると、

$$\int_{-1}^{1}(x-f(x))^2dx = [x^2]_0^1 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 - 2\cdot\frac{2}{n\pi}(c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \cdots\cdots)$$

$= \frac{1}{3} + \left(c_1^2 - \frac{4}{n\pi}c_1\right) + \left(c_2^2 + \frac{4}{n\pi}c_2\right) + \left(c_3^2 - \frac{4}{n\pi}c_3\right) + \left(c_4^2 + \frac{4}{n\pi}c_4\right) + \cdots$

$= \frac{1}{3} + \left(c_1 - \frac{2}{n\pi}\right)^2 + \left(c_2 + \frac{2}{n\pi}\right)^2 + \left(c_3 - \frac{2}{n\pi}\right)^2 + \left(c_4 + \frac{2}{n\pi}\right)^2 + \cdots$

よってこれを最小にする c_n は、$\begin{cases} n\text{が奇数のとき } c_n = \frac{2}{n\pi} \\ n\text{が偶数のとき } c_n = -\frac{2}{n\pi} \end{cases}$ //

［5］

(1) $X=0$ となるのは、$\frac{{}_6C_4}{{}_9C_4} = \frac{15}{126}$

$X=1$ 〃 $\frac{{}_3C_1 \cdot {}_6C_3}{{}_9C_4} = \frac{60}{126}$

$X=2$ 〃 $\frac{{}_3C_2 \cdot {}_6C_2}{{}_9C_4} = \frac{45}{126}$

$X=3$ となるのは、$\frac{{}_3C_3 \cdot {}_6C_1}{{}_9C_4} = \frac{6}{126}$

$X=4$ となることはない

よって、確率分布を表にして表すと、

X	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$	0	1

(2) $Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ の9つのうち、1が3つ、0が6つなので、${}_9C_3 = 84$ 通り //

(3) くじは引く順番によって当たる確率はかわらないので、
$Y_k = 1$ つまり k 番目に引いたくじが当たりである確率は、$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ //

(4) $E(X) = E(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$

$= E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) + E(Y_4)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ $\left(\because E(Y_k) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{4}{3}$ //